Übungsblatt 2

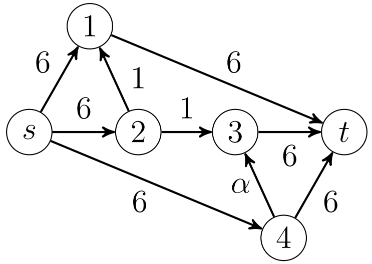
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 6. Mai 2015

Aufgabe 6 ***mündlich***

(a) Passen Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson für den Fall an, dass das Netzwerk nicht nur eine Quelle und eine Senke enthält.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{Q}^+$ korrekt arbeitet. Welche Laufzeitschranke ergibt sich in diesem Fall?

(c) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{R}^+$ korrekt?
Hinweis: Betrachten Sie die Folge der Zunahmepfade $P_1 = (s, 2, 3, t)$, $P_2 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_3 = (s, 2, 3, 4, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, 1, 2, 3, t)$ und $P_i = P_{i-4}$ für $i \geq 6$ in nebenstehendem Netzwerk, wobei die Kapazität α die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ löst.



Aufgabe 7 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich in jedem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ ein maximaler Fluss durch eine Folge $(P_1, \dots, P_k)$ von $k \leq m$ Zunahmepfaden P_i konstruieren lässt, die nur Kanten in E enthalten.

Aufgabe 8 ***mündlich***

Schätzen Sie die Anzahl k der Iterationen für den Ford-Fulkerson-Algorithmus ab, wenn in jedem Schleifendurchlauf ein Zunahmepfad P_i gewählt wird, der den aktuellen Fluss f_{i-1} um einen maximalen Wert $\Delta_i = |f_i| - |f_{i-1}|$ erhöht.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Delta_i > (|f_k| - |f_{i-1}|)/(m+1)$ ist, und folgern Sie $|f_k| - |f_i| < (|f_k| - |f_{i-1}|)/(1 + 1/m)$. Folgern Sie weiterhin $1 \leq |f_k| - |f_{k-1}| \leq |f_k|/(1+1/m)^{k-1}$ und verwenden Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$.

Aufgabe 9 ***mündlich***

Zeigen Sie dass sich in einem beliebigen Netzwerk, in dem es einen s-t-Pfad gibt, der maximale Flusswert erhöht, wenn die Kapazität jeder Kante um 1 erhöht wird. Angenommen, der maximale Flusswert erhöht sich dadurch um k, um welchen Wert steigt dann der maximale Flusswert, wenn alle Kapazitäten um den Wert d statt 1 erhöht werden?

Aufgabe 10 ***mündlich***

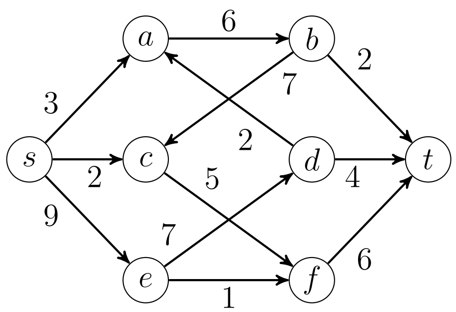
Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Aus N wird ein neues Netzwerk N' konstruiert, indem alle Kanten gespiegelt und die Rollen von s und t vertauscht werden. Welchen Wert hat ein maximaler Fluss f' in N'? Lässt sich ein solcher Fluss f' aus f gewinnen?

Aufgabe 11 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Edmonds-Karp einen maximalen Fluss für N.

(b) Wie viele blockierende Flüsse berechnet der Algorithmus von Dinic bei Eingabe N? Geben Sie diese an.

(c) Geben Sie einen Schnitt S mit minimaler Kapazität für N an.



(d) Interpretieren Sie die Kantenbeschriftungen von N als untere Schranken und geben Sie einen minimalen Fluss sowie einen maximalen Schnitt an.