Übungsblatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 29. April 2015

Aufgabe 1 ***mündlich***

Modifizieren Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson so, dass er auch Mindestkapazitäten von Kanten berücksichtigt. Dabei soll der Fluss durch jede Kante

(a) zwischen der Mindest- und Maximalkapazität dieser Kante liegen.

(b) entweder 0 sein oder zwischen der Mindest- und Maximalkapazität dieser Kante liegen.

Aufgabe 2 ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für ein gegebenes Netzwerk N und einen maximalen Fluss f eine möglichst kleine Kantenmenge M findet, so dass sich f vergrößern lässt, falls man die Kapazitäten dieser Kanten erhöht.

Aufgabe 3 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***mündlich***

(a) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden bestimmt, die alle Knoten überdeckt.

Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen G' mit $n+n$ Knoten, dessen $(n \times n)$-Adjazenzmatrix A' mit der Adjazenzmatrix A von G übereinstimmt, und ergänzen Sie G' zu einem geeigneten Netzwerk N mit $2n + 2$ Knoten, so dass der maximale Fluss in N die Größe $n - p$ hat. Dabei ist p die minimale Anzahl von disjunkten Pfaden, die alle Knoten überdecken.

(b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) für den Fall, dass die berechneten Pfade nicht disjunkt sein müssen.

Hinweis: Modifizieren Sie das Netzwerk N in Teilaufgabe (a) so, dass der minimale Fluss die Größe p' hat, wobei p' die minimale Anzahl von Pfaden ist, die alle Knoten überdecken.

(c) Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen nebenläufig (engl. *concurrent*), falls kein Pfad von u nach v und kein Pfad von v nach u existiert. Zeigen Sie, dass die maximale Größe einer Menge von nebenläufigen Knoten in G gleich p' ist (Satz von Dilworth).

(d) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine Menge nebenläufiger Knoten mit maximaler Größe berechnet.

Aufgabe 4 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie den Satz von Menger: In jedem Digraphen $G = (V, E)$ ist die maximale Anzahl kantendisjunkter Wege von s nach t gleich der Größe einer minimalen Kantenmenge $E' \subseteq E$, die t von s trennt (d.h. es gibt keinen Weg von s nach t in $(V, E - E')$).

(b) Beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Graphen.

Aufgabe 5 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss f für N.

(b) Berechnen Sie die Kapazität des Schnittes $S = \{s, a, b, c\}$.

(c) Hat S minimale Kapazität? Begründen Sie.