

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 45

*mündlich*

Für zwei Dokumente  $x_1$  und  $x_2$  seien die ElGamal-Signaturen  $(\gamma, \delta_1)$  bzw.  $(\gamma, \delta_2)$  bekannt, d.h. es wurde beidesmal dasselbe  $z$  verwendet.

- Beschreiben Sie, wie sich hieraus  $z$  im Fall  $\text{ggT}(\delta_1 - \delta_2, p - 1) = 1$  effizient berechnen lässt, und wie sogar der geheime Exponent  $a$  bestimmt werden kann.
- Seien  $p = 31847$ ,  $g = 5$  und  $b = 25703$ . Berechnen Sie  $z$  und  $a$  anhand der Dokumente  $x_1 = 8990$ ,  $x_2 = 31415$  sowie der Unterschriften  $(23972, 31396)$  und  $(23972, 20481)$ .

### Aufgabe 46

*mündlich*

Betrachten Sie die folgende Variante des ElGamal-Signaturverfahrens. Die Schlüssel werden ähnlich wie beim ElGamal-Signaturverfahren generiert:  $p$  ist prim,  $\alpha$  ist ein Erzeuger von  $\mathbb{Z}_p^*$ ,  $a$  ist der geheime Exponent und  $\beta = \alpha^a \bmod p$ . Allerdings wird  $a$  jetzt aus  $\mathbb{Z}_{p-1}^*$  (anstelle von  $\mathbb{Z}_{p-1}$ ) gewählt. Ein Dokument  $x \in \mathbb{Z}_p$  wird unter  $\hat{k} = (p, \alpha, a)$  mit  $\text{sig}(\hat{k}, x, z) = (\gamma, \delta)$  signiert, wobei gilt:

$$\gamma = \alpha^z \bmod p \text{ und } \delta = (x - z\gamma)a^{-1} \bmod (p - 1).$$

Dieses Verfahren unterscheidet sich also auch in der Berechnung von  $\delta$ .

- Beschreiben Sie, wie sich die Unterschrift  $(\gamma, \delta)$  eines Dokuments  $x$  bei Kenntnis des Verifikationsschlüssels  $k = (p, \alpha, \beta)$  verifizieren lässt.
- Welchen Vorteil bei der Berechnung der Signatur besitzt diese Variante gegenüber dem ursprünglichen Verfahren?

### Aufgabe 47

*mündlich*

Angenommen, Alice verwendet das ElGamal-Signaturverfahren und möchte bei der Berechnung der beim Signieren verwendeten Zufallszahlen Zeit sparen, indem sie ein  $z_0$  wählt und die  $i$ -te Nachricht unter Verwendung von  $z_i \equiv_{p-1} z_0 + 2i$  signiert. (Es gilt also  $z_i \equiv_{p-1} z_{i-1} + 2$ .)

- Zeigen Sie, wie Bob bei Kenntnis von zwei aufeinander folgenden signierten Nachrichten  $(x_i, \text{sig}(x_i, z_i))$  und  $(x_{i+1}, \text{sig}(x_{i+1}, z_{i+1}))$  den privaten Schlüssel  $a$  berechnen kann, ohne einen diskreten Logarithmus zu berechnen.

*Bemerkung:* Für diesen Angriff muss der Wert von  $i$  nicht bekannt sein.

- Führen sie den Angriff durch, wenn Bob die Werte  $p = 28703$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 11339$ ,  $x_i = 12000$ ,  $\text{sig}(x_i, z_i) = (26530, 19862)$ ,  $x_{i+1} = 24567$  und  $\text{sig}(x_{i+1}, z_{i+1}) = (3081, 7604)$  kennt.

### Aufgabe 48

*mündlich*

- Falls sich bei der Berechnung einer ElGamal-Signatur der Wert  $\delta = 0$  ergibt, muss eine neue Zufallszahl  $z$  gewählt werden. Überlegen Sie, wie sich aus einer ElGamal-Signatur  $(\gamma, \delta)$  mit  $\delta = 0$  und dem öffentlichen Verifikationsschlüssel der geheime Signaturschlüssel berechnen lässt.
- Beim DSA muss auch im Fall  $\gamma = 0$  eine neue Zufallszahl  $z$  gewählt werden. Überlegen Sie, wie aus einer DSA-»Signatur«  $(\gamma, \delta)$  mit  $\gamma = 0$  die benutzte Zufallszahl  $z$  bestimmt werden kann, und wie sich daraus für ein beliebiges Dokument  $x$  eine gefälschte »Signatur«  $(\gamma, \delta)$  mit  $\gamma = 0$  erhalten lässt.

### Aufgabe 49

*mündlich*

Wir haben gesehen, dass das ElGamal-Signaturverfahren gebrochen werden kann, wenn die gleiche Zufallszahl  $k$  mehrmals verwendet wird. Zeigen Sie, wie ähnliche Angriffe auf das Schnorr-Signaturverfahren, DSA und ECDSA möglich sind.

### Aufgabe 50

**10 Punkte**

In der Vorlesung wurde ein Angriff gegen das ElGamal-Signaturverfahren vorgestellt, mit dem sich eine gültige Signatur  $(\gamma, \delta)$  für ein zufälliges Dokument  $x$  berechnen lässt (nichtselektive Fälschung bei bekanntem Verifikationsschlüssel). Hierbei berechnet der Gegner für beliebige Parameter  $i, j$  mit  $0 \leq i, j \leq p - 2$  und  $\text{ggT}(j, p - 1) = 1$  die Fälschung  $(x, \gamma, \delta)$  mittels

$$\gamma := g^i b^j \bmod p, \quad \delta := -\gamma j^{-1} \bmod p - 1 \text{ und } x := -\gamma i j^{-1} \bmod p - 1.$$

- Berechnen Sie eine Fälschung  $(x, \gamma, \delta)$  für den Verifikationsschlüssel  $k = (b, g, p)$  mit  $p = 467$ ,  $g = 2$  und  $b = 132$ . (Wählen Sie  $i = 99$  und  $j = 179$ .)
- Ähnlich wie oben lässt sich auch eine nichtselektive Fälschung  $(x', \gamma', \delta')$  bei bekannter Signatur  $(x, \gamma, \delta)$  vornehmen, indem für beliebige Parameter  $h, i, j$  mit  $0 \leq h, i, j \leq p - 2$  und  $\text{ggT}(h\gamma - j\delta, p - 1) = 1$

$$\gamma' := \gamma^h g^i b^j \bmod p,$$

$$\delta' := \delta \gamma' (h\gamma - j\delta)^{-1} \bmod p - 1 \text{ und}$$

$$x' := \gamma' (hx + i\delta) (h\gamma - j\delta)^{-1} \bmod p - 1$$

gewählt wird. Zeigen Sie, dass die Signatur  $(x', \gamma', \delta')$  als echt anerkannt wird.

- Das Dokument  $x = 100$  hat unter ElGamal (mit  $p = 467$ ,  $g = 2$  und  $b = 132$ ) die Signatur  $(\gamma, \delta) = (29, 51)$  erhalten. Berechnen Sie hieraus ein signiertes Dokument, das Oskar bei Verwendung der Werte  $h = 102$ ,  $i = 45$  und  $j = 293$  erzeugen kann. Überprüfen Sie die Verifikationsbedingung.

