

Vorlesungsskript  
Graphalgorithmen

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

11. Juli 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	2
1.2 Datenstrukturen für Graphen . . . . .	4
1.3 Keller und Warteschlange . . . . .	5
1.4 Durchsuchen von Graphen . . . . .	7
1.5 Spannbäume und Spannwälder . . . . .	10
1.6 Berechnung der Zusammenhangskomponenten . . . . .	11
1.7 Breiten- und Tiefensuche . . . . .	11
<b>2 Berechnung kürzester Wege</b>	<b>15</b>
2.1 Der Dijkstra-Algorithmus . . . . .	15
2.2 Der Bellman-Ford-Algorithmus . . . . .	18
2.3 Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus . . . . .	19
2.4 Der Floyd-Warshall-Algorithmus . . . . .	21
<b>3 Matchings</b>	<b>23</b>
<b>4 Flüsse in Netzwerken</b>	<b>27</b>
4.1 Der Ford-Fulkerson-Algorithmus . . . . .	27
4.2 Der Edmonds-Karp-Algorithmus . . . . .	31
4.3 Der Algorithmus von Dinic . . . . .	33
4.4 Kostenoptimale Flüsse . . . . .	39
<b>5 Färben von Graphen</b>	<b>44</b>
5.1 Färben von planaren Graphen . . . . .	45
5.2 Färben von chordalen Graphen . . . . .	51
5.3 Kantenfärbungen . . . . .	53

# 1 Grundlagen

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten **Muhammad Al Chwarizmi** (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er jede *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten löst (etwa durch Produktion einer *Ausgabe*). Ein Algorithmus ist ein „Verfahren“ zur Lösung eines Entscheidungs- oder Berechnungsproblems, das sich prinzipiell auf einer Turingmaschine (TM) implementieren lässt (**Church-Turing-Theorie**).

## Die Registermaschine

Bei Aussagen zur Laufzeit von Algorithmen beziehen wir uns auf die Registermaschine (engl. random access machine; RAM). Dieses Modell ist etwas flexibler als die Turingmaschine, da es den unmittelbaren Lese- und Schreibzugriff (*random access*) auf eine beliebige Speicher-Einheit (Register) erlaubt. Als Speicher stehen beliebig viele Register zur Verfügung, die jeweils eine beliebig große natürliche Zahl speichern können. Auf den Registerinhalten sind folgende arithmetische Operationen in einem Rechenschritt ausführbar: Addition, Subtraktion, abgerundetes Halbieren und Verdoppeln. Unabhängig davon geben wir die Algorithmen in Pseudocode an. Das RAM-Modell benutzen wir nur zur Komplexitätsabschätzung.

Die Laufzeit von RAM-Programmen wird wie bei TMs in der Länge der Eingabe gemessen. Man beachte, dass bei arithmetischen Problemen (wie etwa Multiplikation, Division, Primzahltests, etc.) die Länge

einer Zahleingabe  $n$  durch die Anzahl  $\lceil \log n \rceil$  der für die **Binärkodierung** von  $n$  benötigten Bits gemessen wird. Dagegen bestimmt bei nicht-arithmetischen Problemen (z.B. Graphalgorithmen oder Sortierproblemen) die Anzahl der gegebenen Zahlen, Knoten oder Kanten die Länge der Eingabe.

## Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

**Definition 1.** Seien  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}^+$ . Wir schreiben  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , falls es Zahlen  $n_0$  und  $c$  gibt mit

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Die Bedeutung der Aussage  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  ist, dass  $f$  „nicht wesentlich schneller“ als  $g$  wächst. Formal bezeichnet der Term  $\mathcal{O}(g(n))$  die Klasse aller Funktionen  $f$ , die obige Bedingung erfüllen. Die Gleichung  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  drückt also in Wahrheit eine **Element-Beziehung**  $f \in \mathcal{O}(g(n))$  aus.  $O$ -Terme können auch auf der linken Seite vorkommen. In diesem Fall wird eine **Inklusionsbeziehung** ausgedrückt. So steht  $n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$  für die Aussage  $\{n^2 + f \mid f \in \mathcal{O}(n)\} \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ .

### Beispiel 2.

- $7 \log(n) + n^3 = \mathcal{O}(n^3)$  ist *richtig*.
- $7 \log(n)n^3 = \mathcal{O}(n^3)$  ist *falsch*.
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$  ist *richtig*.
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$  ist *falsch* (siehe Übungen).  $\triangleleft$

Es gibt noch eine Reihe weiterer nützlicher Größenvergleiche von Funktionen.

**Definition 3.** Wir schreiben  $f(n) = o(g(n))$ , falls es für jedes  $c > 0$  eine Zahl  $n_0$  gibt mit

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Damit wird ausgedrückt, dass  $f$  „*wesentlich langsamer*“ als  $g$  wächst.  
Außerdem schreiben wir

- $f(n) = \Omega(g(n))$  für  $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ , d.h.  $f$  wächst *mindestens so schnell* wie  $g$ )
- $f(n) = \omega(g(n))$  für  $g(n) = o(f(n))$ , d.h.  $f$  wächst *wesentlich schneller* als  $g$ , und
- $f(n) = \Theta(g(n))$  für  $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$ , d.h.  $f$  und  $g$  wachsen *ungefähr gleich schnell*.

## 1.1 Graphentheoretische Grundlagen

**Definition 4.** Ein (*ungerichteter*) **Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und

$E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \left\{ \{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v \right\}.$$

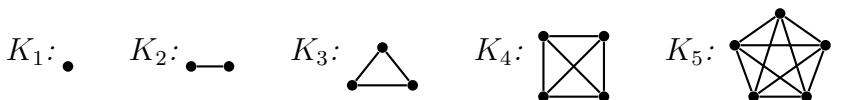
Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- Die **Nachbarschaft** von  $v$  ist  $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$ .
- Der **Minimalgrad** von  $G$  ist  $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist  $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ .

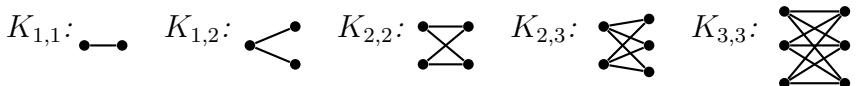
Falls  $G$  aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach  $N(v)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\delta$  usw.

**Beispiel 5.**

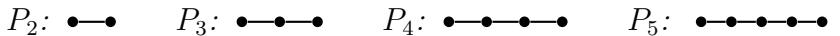
- Der **vollständige Graph**  $(V, E)$  auf  $n$  Knoten, d.h.  $\|V\| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , wird mit  $K_n$  und der **leere Graph**  $(V, \emptyset)$  auf  $n$  Knoten wird mit  $E_n$  bezeichnet.



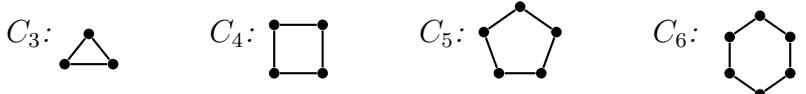
- Der **vollständige bipartite Graph**  $(A, B, E)$  auf  $a+b$  Knoten, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\|A\| = a$ ,  $\|B\| = b$  und  $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$  wird mit  $K_{a,b}$  bezeichnet.



- Der **Pfad der Länge  $n-1$**  wird mit  $P_n$  bezeichnet.



- Der **Kreis der Länge  $n$**  wird mit  $C_n$  bezeichnet.



**Definition 6.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von  $G$  mit beiden Endpunkten in  $U$  gibt, d.h. es gilt  $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$ . Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in  $U$  in  $E$  ist, d.h. es gilt  $\binom{U}{2} \subseteq E$ . Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.  $G$  heißt  **$k$ -färbbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert. Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

- Ein Graph heißt **bipartit**, wenn  $\chi(G) \leq 2$  ist.

- e) Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von  $G$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist. Ein Subgraph  $G' = (V', E')$  heißt **(durch  $V'$ ) induziert**, falls  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist. Hierfür schreiben wir auch  $H = G[V']$ .
- f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ , der jede Kante  $e \in E$  höchstens einmal durchläuft. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also  $\ell$ . Im Fall  $\ell = 0$  heißt der Weg **trivial**. Ein Weg  $v_0, \dots, v_\ell$  heißt auch  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg**.
- g) Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  einen  $u$ - $v$ -Weg gibt.  $G$  heißt  **$k$ -fach zusammenhängend**,  $1 < k < n$ , falls  $G$  nach Entfernen von beliebigen  $l \leq \min\{n-1, k-1\}$  Knoten immer noch zusammenhängend ist.
- h) Ein **Zyklus** ist ein  $u$ - $v$ -Weg der Länge  $\ell \geq 2$  mit  $u = v$ .
- i) Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- j) Ein **Kreis** ist ein Zyklus  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_0$  der Länge  $\ell \geq 3$ , für den  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$  paarweise verschieden sind.
- k) Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält.
- l) Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.
- m) Jeder Knoten  $u \in V$  vom Grad  $\deg(u) \leq 1$  heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad  $\geq 2$ ) heißen **innere Knoten**.

Es ist leicht zu sehen, dass die Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die durch die Äquivalenzklassen von  $Z$  induzierten Teilgraphen heißen die **Zusammenhangskomponenten** (engl. *connected components*) von  $G$ .

**Definition 7.** Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

- $V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und
- $E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei  $E$  auch Schlingen  $(u, u)$  enthalten kann. Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von  $v$  ist  $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ .
- b) Die **Vorgängermenge** von  $v$  ist  $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ .
- c) Die **Nachbarmenge** von  $v$  ist  $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ .
- d) Der **Ausgangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$  und der **Eingangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$ . Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ .
- e) Ein (**gerichteter**)  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg** ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ , der jede Kante  $e \in E$  höchstens einmal durchläuft.
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter  $u$ - $v$ -Weg der Länge  $\ell \geq 1$  mit  $u = v$ .
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in  $G$  ist ein gerichteter Zyklus  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v_0$  der Länge  $\ell \geq 1$ , für den  $v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}$  paarweise verschieden sind.
- i)  $G$  heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in  $G$  keinen gerichteten Kreis gibt.
- j)  $G$  heißt **schwach zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  einen  $u$ - $v$ -Pfad oder einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.
- k)  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  sowohl einen  $u$ - $v$ -Pfad als auch einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.

## 1.2 Datenstrukturen für Graphen

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph bzw. Digraph und sei  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann ist die  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

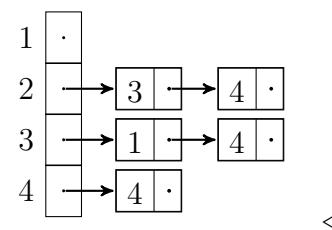
die **Adjazenzmatrix** von  $G$ . Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit  $a_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten  $v_i$  eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten gleichbleibt, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index  $i$  verweist auf die Adjazenzliste von Knoten  $v_i$ . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

### Beispiel 8.

Betrachte den gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ . Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



Folgende Tabelle gibt den Aufwand der wichtigsten elementaren Operationen auf Graphen in Abhängigkeit von der benutzten Datenstruktur

an. Hierbei nehmen wir an, dass sich die Knotenmenge  $V$  nicht ändert.

	Adjazenzmatrix		Adjazenzlisten	
	einfach	clever	einfach	clever
Speicherbedarf	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$
Initialisieren	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$
Kante einfügen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Kante entfernen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$
Test auf Kante	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$

### Bemerkung 9.

- Der Aufwand für die Initialisierung des leeren Graphen in der Adjazenzmatrixdarstellung lässt sich auf  $\mathcal{O}(1)$  drücken, indem man mithilfe eines zusätzlichen Feldes  $B$  die Gültigkeit der Matrixeinträge verwaltet (siehe Übungen).
- Die Verbesserung beim Löschen einer Kante in der Adjazenzlistendarstellung erhält man, indem man die Adjazenzlisten doppelt verkettet und im ungerichteten Fall die beiden Vorkommen jeder Kante in den Adjazenzlisten der beiden Endknoten gegenseitig verlinkt (siehe die Prozeduren `Insert(Di)Edge` und `Remove(Di)Edge` auf den nächsten Seiten).
- Bei der Adjazenzlistendarstellung können die Knoten auch in einer doppelt verketteten Liste organisiert werden. In diesem Fall können dann auch Knoten in konstanter Zeit hinzugefügt und in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  wieder entfernt werden (unter Beibehaltung der übrigen Speicher- und Laufzeitschranken).

Es folgen die Prozeduren für die in obiger Tabelle aufgeführten elementaren Graphoperationen, falls  $G$  als ein Feld  $G[1, \dots, n]$  von (Zeigern auf) doppelt verkettete Adjazenzlisten repräsentiert wird. Wir behandeln zuerst den Fall eines Digraphen.

**Prozedur Init**


---

```

1 for  $i := 1$  to  $n$  do
2    $G[i] := \perp$ 

```

---

**Prozedur InsertDiEdge( $u, v$ )**


---

```

1 erzeuge Listeneintrag  $e$ 
2 source( $e$ ) :=  $u$ 
3 target( $e$ ) :=  $v$ 
4 prev( $e$ ) :=  $\perp$ 
5 next( $e$ ) :=  $G[u]$ 
6 if  $G[u] \neq \perp$  then
7   prev( $G[u]$ ) :=  $e$ 
8  $G[u] := e$ 
9 return  $e$ 

```

---

**Prozedur RemoveDiEdge( $e$ )**


---

```

1 if next( $e$ )  $\neq \perp$  then
2   prev(next( $e$ )) := prev( $e$ )
3 if prev( $e$ )  $\neq \perp$  then
4   next(prev( $e$ )) := next( $e$ )
5 else
6    $G[\text{source}(e)] := \text{next}(e)$ 

```

---

**Prozedur Edge( $u, v$ )**


---

```

1  $e := G[u]$ 
2 while  $e \neq \perp$  do
3   if target( $e$ ) =  $v$  then
4     return 1
5    $e := \text{next}(e)$ 
6 return 0

```

---

Falls  $G$  ungerichtet ist, können diese Operationen wie folgt implementiert werden (die Prozeduren **Init** und **Edge** bleiben unverändert).

**Prozedur InsertEdge( $u, v$ )**


---

```

1 erzeuge Listeneinträge  $e, e'$ 
2 opposite( $e$ ) :=  $e'$ 
3 opposite( $e'$ ) :=  $e$ 
4 next( $e$ ) :=  $G[u]$ 
5 next( $e'$ ) :=  $G[v]$ 
6 if  $G[u] \neq \perp$  then
7   prev( $G[u]$ ) :=  $e$ 
8 if  $G[v] \neq \perp$  then
9   prev( $G[v]$ ) :=  $e'$ 
10  $G[u] := e; G[v] := e'$ 
11 source( $e$ ) := target( $e'$ ) :=  $u$ 
12 target( $e$ ) := source( $e'$ ) :=  $v$ 
13 prev( $e$ ) :=  $\perp$ 
14 prev( $e'$ ) :=  $\perp$ 
15 return  $e$ 

```

---

**Prozedur RemoveEdge( $e$ )**


---

```

1 RemoveDiEdge( $e$ )
2 RemoveDiEdge(opposite( $e$ ))

```

---

### 1.3 Keller und Warteschlange

Für das Durchsuchen eines Graphen ist es vorteilhaft, die bereits besuchten (aber noch nicht abgearbeiteten) Knoten in einer Menge  $B$  zu speichern. Damit die Suche effizient ist, sollte die Datenstruktur für  $B$  folgende Operationen effizient implementieren.

- Init( $B$ ):** Initialisiert  $B$  als leere Menge.
- Empty( $B$ ):** Testet  $B$  auf Leerheit.
- Insert( $B, u$ ):** Fügt  $u$  in  $B$  ein.
- Element( $B$ ):** Gibt ein Element aus  $B$  zurück.
- Remove( $B$ ):** Gibt ebenfalls **Element( $B$ )** zurück und entfernt es aus  $B$ .

Andere Operationen wie z.B. **Remove( $B, u$ )** werden nicht benötigt.

Die gewünschten Operationen lassen sich leicht durch einen **Keller** (auch **Stapel** genannt) (engl. *stack*) oder eine **Warteschlange** (engl. *queue*) implementieren. Falls maximal  $n$  Datensätze gespeichert werden müssen, kann ein Feld zur Speicherung der Elemente benutzt werden. Andernfalls können sie auch in einer einfach verketteten Liste gespeichert werden.

### Stack $S$ – Last-In-First-Out

- Top( $S$ ):** Gibt das oberste Element von  $S$  zurück.
- Push( $S, x$ ):** Fügt  $x$  als oberstes Element zum Keller hinzu.
- Pop( $S$ ):** Gibt das oberste Element von  $S$  zurück und entfernt es.

### Queue $Q$ – Last-In-Last-Out

- Enqueue( $Q, x$ ):** Fügt  $x$  am Ende der Schlange hinzu.
- Head( $Q$ ):** Gibt das erste Element von  $Q$  zurück.
- Dequeue( $Q$ ):** Gibt das erste Element von  $Q$  zurück und entfernt es.

Die Kelleroperationen lassen sich wie folgt auf einem Feld  $S[1 \dots n]$  implementieren. Die Variable **size( $S$ )** enthält die Anzahl der im Keller gespeicherten Elemente.

---

### Prozedur StackInit( $S$ )

---

```
1 size( $S$ ) := 0
```

---



---

### Prozedur StackEmpty( $S$ )

---

```
1 return(size( $S$ ) = 0)
```

---



---

### Prozedur Top( $S$ )

---

```
1 if size( $S$ ) > 0 then
2   return( $S[\text{size}(S)]$ )
3 else
4   return( $\perp$ )
```

---



---

### Prozedur Push( $S, x$ )

---

```
1 if size( $S$ ) <  $n$  then
2   size( $S$ ) := size( $S$ ) + 1
3    $S[\text{size}(S)]$  :=  $x$ 
4 else
5   return( $\perp$ )
```

---



---

### Prozedur Pop( $S$ )

---

```
1 if size( $S$ ) > 0 then
2   size( $S$ ) := size( $S$ ) - 1
3   return( $S[\text{size}(S) + 1]$ )
4 else
5   return( $\perp$ )
```

---

Es folgen die Warteschlangenoperationen für die Speicherung in einem Feld  $Q[1 \dots n]$ . Die Elemente werden der Reihe nach am Ende der Schlange  $Q$  (zyklisch) eingefügt und am Anfang entnommen. Die Variable **head( $Q$ )** enthält den Index des ersten Elements der Schlange und **tail( $Q$ )** den Index des hinter dem letzten Element von  $Q$  befindlichen Eintrags.

**Prozedur** QueueInit( $Q$ )

---

```

1 head( $Q$ ) := 1
2 tail( $Q$ ) := 1
3 size( $Q$ ) := 0

```

---

**Prozedur** QueueEmpty( $Q$ )

---

```
1 return(size( $Q$ ) = 0)
```

---

**Prozedur** Head( $Q$ )

---

```

1 if QueueEmpty( $Q$ ) then
2   return( $\perp$ )
3 else
4   return $Q[\text{head}(Q)]$ 

```

---

**Prozedur** Enqueue( $Q, x$ )

---

```

1 if size( $Q$ ) =  $n$  then
2   return( $\perp$ )
3   size( $Q$ ) := size( $Q$ ) + 1
4    $Q[\text{tail}(Q)] := x$ 
5   if  $\text{tail}(Q) = n$  then
6      $\text{tail}(Q) := 1$ 
7   else
8      $\text{tail}(Q) := \text{tail}(Q) + 1$ 

```

---

**Prozedur** Dequeue( $Q$ )

---

```

1 if QueueEmpty( $Q$ ) then
2   return( $\perp$ )
3   size( $Q$ ) := size( $Q$ ) - 1
4    $x := Q[\text{head}(Q)]$ 
5   if  $\text{head}(Q) = n$  then
6      $\text{head}(Q) := 1$ 

```

---



---

```

7   else
8      $\text{head}(Q) := \text{head}(Q) + 1$ 
9   return( $x$ )

```

---

**Satz 10.** Sämtliche Operationen für einen Keller  $S$  und eine Warteschlange  $Q$  sind in konstanter Zeit  $\mathcal{O}(1)$  ausführbar.

**Bemerkung 11.** Mit Hilfe von einfach verketteten Listen sind Keller und Warteschlangen auch für eine unbeschränkte Anzahl von Datensätzen mit denselben Laufzeitbeschränkungen implementierbar.

Die für das Durchsuchen von Graphen benötigte Datenstruktur  $B$  lässt sich nun mittels Keller bzw. Schlange wie folgt realisieren.

Operation	Keller $S$	Schlange $Q$
<b>Init</b> ( $B$ )	<b>StackInit</b> ( $S$ )	<b>QueueInit</b> ( $Q$ )
<b>Empty</b> ( $B$ )	<b>StackEmpty</b> ( $S$ )	<b>QueueEmpty</b> ( $Q$ )
<b>Insert</b> ( $B, u$ )	<b>Push</b> ( $S, u$ )	<b>Enqueue</b> ( $Q, u$ )
<b>Element</b> ( $B$ )	<b>Top</b> ( $S$ )	<b>Head</b> ( $Q$ )
<b>Remove</b> ( $B$ )	<b>Pop</b> ( $S$ )	<b>Dequeue</b> ( $Q$ )

## 1.4 Durchsuchen von Graphen

Wir geben nun für die Suche in einem Graphen bzw. Digraphen  $G = (V, E)$  einen Algorithmus **GraphSearch** mit folgenden Eigenschaften an:

**GraphSearch** benutzt eine Prozedur **Explore**, um alle Knoten und Kanten von  $G$  zu besuchen.

**Explore**( $w$ ) findet Pfade zu allen von  $w$  aus erreichbaren Knoten.

Hierzu speichert **Explore**( $w$ ) für jeden über eine Kante  $\{u, v\}$  bzw.  $(u, v)$  neu entdeckten Knoten  $v \neq w$  den Knoten  $u$  in **parent**( $v$ ).

Wir nennen die bei der Entdeckung eines neuen Knotens  $v$  durchlaufenden Kanten  $(\text{parent}(v), v)$  **parent-Kanten**.

Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise  $e = uv$  sowohl für gerichtete als auch für ungerichtete Kanten  $e = (u, v)$  bzw.  $e = \{u, v\}$ .

---

**Algorithmus** `GraphSearch( $V, E$ )`


---

```

1  for all  $v \in V, e \in E$  do
2    vis( $v$ ) := false
3    parent( $v$ ) := ⊥
4    vis( $e$ ) := false
5  for all  $w \in V$  do
6    if vis( $w$ ) = false then Explore( $w$ )

```

---

**Prozedur** `Explore( $w$ )`


---

```

1  vis( $w$ ) := true
2  Init( $B$ )
3  Insert( $B, w$ )
4  while ¬Empty( $B$ ) do
5     $u := \text{Element}(B)$ 
6    if  $\exists e = uv \in E : \text{vis}(e) = \text{false}$  then
7      vis( $e$ ) := true
8      if vis( $v$ ) = false then
9        vis( $v$ ) := true
10       parent( $v$ ) :=  $u$ 
11       Insert( $B, v$ )
12    else
13      Remove( $B$ )

```

---

Um die nächste von  $u$  ausgehende Kante  $uv$ , die noch nicht besucht wurde, in konstanter Zeit bestimmen zu können, kann man bei der Adjazenzlistendarstellung für jeden Knoten  $u$  neben dem Zeiger auf die erste Kante in der Adjazenzliste von  $u$  einen zweiten Zeiger beiehalten, der auf die aktuelle Kante in der Liste verweist.

**Suchwälder**

**Definition 12.** Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph.

- Ein Knoten  $w \in V$  heißt **Wurzel** von  $G$ , falls alle Knoten  $v \in V$  von  $w$  aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen gerichteten  $w$ - $v$ -Weg in  $G$ ).
- $G$  heißt **gerichteter Wald**, wenn  $G$  kreisfrei ist und jeder Knoten  $v \in V$  Eingangsgrad  $\deg^-(v) \leq 1$  hat.
- Ein Knoten  $u \in V$  vom Ausgangsgrad  $\deg^+(u) = 0$  heißt **Blatt**.
- Ein **gerichteter Wald**, der eine Wurzel hat, heißt **gerichteter Baum**.

In einem gerichteten Baum liegen die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel bereits eindeutig fest. Daher kann bei bekannter Wurzel auf die Angabe der Kantenrichtungen auch verzichtet werden. Man spricht dann von einem **Wurzelbaum**.

Betrachte den durch `SearchGraph( $V, E$ )` erzeugten Digraphen  $W = (V, E_{\text{parent}})$  mit

$$E_{\text{parent}} = \{( \text{parent}(v), v ) \mid v \in V \text{ und } \text{parent}(v) \neq \perp\}.$$

Da  $\text{parent}(v)$  vor  $v$  markiert wird, ist klar, dass  $W$  kreisfrei ist. Zudem hat jeder Knoten  $v$  höchstens einen Vorgänger  $\text{parent}(v)$ . Dies zeigt, dass  $W$  tatsächlich ein gerichteter Wald ist.  $W$  heißt **Suchwald** von  $G$  und die Kanten  $(\text{parent}(v), v)$  von  $W$  werden auch als **Baumkanten** bezeichnet.

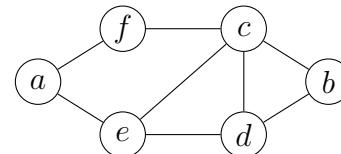
$W$  hängt zum einen davon ab, wie die Datenstruktur  $B$  implementiert ist (z.B. als Keller oder als Warteschlange). Zum anderen hängt  $W$  aber auch von der Reihenfolge der Knoten in den Adjazenzlisten ab.

**Klassifikation der Kanten eines (Di-)Graphen**

Die Kanten eines Graphen  $G = (V, E)$  werden durch den Suchwald  $W = (V, E_{\text{parent}})$  in vier Klassen eingeteilt. Dabei erhält jede Kante

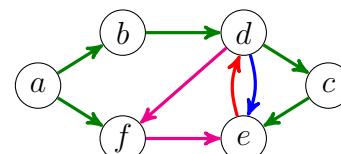
die Richtung, in der sie bei ihrem ersten Besuch durchlaufen wird. Neben den Baumkanten ( $\text{parent}(v), v \in E_{\text{parent}}$ ) gibt es noch Rückwärts-, Vorwärts- und Querkanten. **Rückwärtskanten** ( $u, v$ ) verbinden einen Knoten  $u$  mit einem Knoten  $v$ , der auf dem **parent**-Pfad  $P(u)$  von  $u$  liegt. Liegt dagegen  $u$  auf  $P(v)$ , so wird  $(u, v)$  als **Vorwärtskante** bezeichnet. Alle übrigen Kanten heißen **Querkanten**. Diese verbinden zwei Knoten, von denen keiner auf dem **parent**-Pfad des anderen liegt.

**Beispiel 13.** Bei Aufruf mit dem Startknoten  $a$  könnte die Prozedur **Explore** den nebenstehendem Graphen beispielsweise wie folgt durchsuchen.



Menge $B$	Knoten	Kante	Typ	$B$	Knoten	Kante	Typ
$\{a\}$	$a$	$(a, b)$	B	$\{d, e, f\}$	$d$	$(d, e)$	V
$\{a, b\}$	$a$	$(a, f)$	B	$\{d, e, f\}$	$d$	$(d, f)$	Q
$\{a, b, f\}$	$a$	-	-	$\{d, e, f\}$	$d$	-	-
$\{b, f\}$	$b$	$(b, d)$	B	$\{e, f\}$	$e$	$(e, d)$	R
$\{b, d, f\}$	$b$	-	-	$\{e, f\}$	$e$	-	-
$\{d, f\}$	$d$	$(d, c)$	B	$\{f\}$	$f$	$(f, e)$	Q
$\{c, d, f\}$	$c$	$(c, e)$	B	$\{f\}$	$f$	-	-
$\{c, d, e, f\}$	$c$	-	-	$\emptyset$			

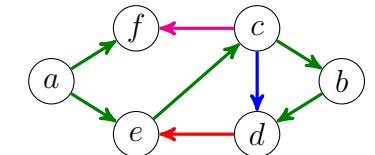
Dabei entsteht nebenstehender Suchwald.



Die Klassifikation der Kanten eines Digraphen  $G$  erfolgt analog, wobei die Richtungen jedoch bereits durch  $G$  vorgegeben sind (dabei werden Schlingen der Kategorie der Vorwärtskanten zugeordnet). Tatsächlich

durchläuft **Explore** bei einem Graphen die Knoten und Kanten in der gleichen Reihenfolge wie bei dem Digraphen, der für jede ungerichtete Kante  $\{u, v\}$  die beiden gerichteten Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  enthält.

**Beispiel 14.** Bei Aufruf mit dem Startknoten  $a$  könnte die Prozedur **Explore** beispielsweise nebenstehenden Suchwald generieren.



Menge $B$	Knoten	Kante		$B$	Knoten	Kante	
$\{a\}$	$a$	$\{a, e\}$	B	$\{c, d, e, f\}$	$c$	$\{c, f\}$	Q
$\{a, e\}$	$a$	$\{a, f\}$	B	$\{c, d, e, f\}$	$c$	-	-
$\{a, e, f\}$	$a$	-	-	$\{d, e, f\}$	$d$	$\{d, b\}$	-
$\{e, f\}$	$e$	$\{e, a\}$	-	$\{d, e, f\}$	$d$	$\{d, c\}$	-
$\{e, f\}$	$e$	$\{e, c\}$	B	$\{d, e, f\}$	$d$	$\{d, e\}$	R
$\{c, e, f\}$	$c$	$\{c, b\}$	B	$\{d, e, f\}$	$d$	-	-
$\{b, c, e, f\}$	$b$	$\{b, c\}$	-	$\{e, f\}$	$e$	$\{e, d\}$	-
$\{b, c, e, f\}$	$b$	$\{b, d\}$	B	$\{e, f\}$	$e$	-	-
$\{b, c, d, e, f\}$	$b$	-	-	$\{f\}$	$f$	$\{f, a\}$	-
$\{c, d, e, f\}$	$c$	$\{c, d\}$	V	$\{f\}$	$f$	$\{f, c\}$	-
$\{c, d, e, f\}$	$c$	$\{c, e\}$	-	$\{f\}$	$f$	-	-

**Satz 15.** Falls der (un)gerichtete Graph  $G$  in Adjazenzlisten-Darstellung gegeben ist, durchläuft **GraphSearch** alle Knoten und Kanten von  $G$  in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ .

**Beweis.** Offensichtlich wird jeder Knoten  $u$  genau einmal zu  $B$  hinzugefügt. Dies geschieht zu dem Zeitpunkt, wenn  $u$  zum ersten Mal „besucht“ und das Feld **visited** für  $u$  auf **true** gesetzt wird. Außerdem werden in Zeile 6 von **Explore** alle von  $u$  ausgehenden Kanten durchlaufen, bevor  $u$  wieder aus  $B$  entfernt wird. Folglich werden tatsächlich alle Knoten und Kanten von  $G$  besucht.

Wir bestimmen nun die Laufzeit des Algorithmus **GraphSearch**. Innerhalb von **Explore** wird die while-Schleife für jeden Knoten  $u$  genau  $(\deg(u) + 1)$ -mal bzw.  $(\deg^+(u) + 1)$ -mal durchlaufen:

- einmal für jeden Nachbarn  $v$  von  $u$  und
- dann noch einmal, um  $u$  aus  $B$  zu entfernen.

Insgesamt sind das  $n + 2m$  im ungerichteten bzw.  $n + m$  Durchläufe im gerichteten Fall. Bei Verwendung von Adjazenzlisten kann die nächste von einem Knoten  $v$  aus noch nicht besuchte Kante  $e$  in konstanter Zeit ermittelt werden, falls man für jeden Knoten  $v$  einen Zeiger auf  $e$  in der Adjazenzliste von  $v$  vorsieht. Die Gesamlaufzeit des Algorithmus **GraphSearch** beträgt somit  $\mathcal{O}(n + m)$ . ■

Als nächstes zeigen wir, dass **Explore**( $w$ ) zu allen von  $w$  aus erreichbaren Knoten  $v$  einen (gerichteten)  $w-v$ -Pfad liefert. Dieser lässt sich mittels **parent** wie folgt zurückverfolgen. Sei

$$u_i = \begin{cases} v, & i = 0, \\ \text{parent}(u_{i-1}), & i > 0 \text{ und } u_{i-1} \neq \perp \end{cases}$$

und sei  $\ell = \min\{i \geq 0 \mid u_{i+1} = \perp\}$ . Dann ist  $u_\ell = w$  und  $p = (u_\ell, \dots, u_0)$  ein  $w-v$ -Pfad. Wir nennen  $P$  den **parent-Pfad** von  $v$  und bezeichnen ihn mit  $\mathbf{P}(v)$ .

**Satz 16.** Falls beim Aufruf von **Explore** alle Knoten und Kanten als unbesucht markiert sind, berechnet **Explore**( $w$ ) zu allen erreichbaren Knoten  $v$  einen (gerichteten)  $w-v$ -Pfad  $P(v)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass **Explore**( $w$ ) alle von  $w$  aus erreichbaren Knoten besucht. Hierzu führen wir Induktion über die Länge  $\ell$  eines kürzesten  $w-v$ -Weges.

$\ell = 0$ : In diesem Fall ist  $v = w$  und  $w$  wird in Zeile 1 besucht.

$\ell \sim \ell + 1$ : Sei  $v$  ein Knoten mit Abstand  $\ell + 1$  von  $w$ . Dann hat ein Nachbarknoten  $u \in N(v)$  den Abstand  $\ell$  von  $w$ . Folglich wird  $u$  nach IV besucht. Da  $u$  erst dann aus  $B$  entfernt wird, wenn alle seine Nachbarn (bzw. Nachfolger) besucht wurden, wird auch  $v$  besucht.

Es bleibt zu zeigen, dass **parent** einen Pfad  $P(v)$  von  $w$  zu jedem besuchten Knoten  $v$  liefert. Hierzu führen wir Induktion über die Anzahl  $k$  der vor  $v$  besuchten Knoten.

$k = 0$ : In diesem Fall ist  $v = w$ . Da  $\text{parent}(w) = \perp$  ist, liefert **parent** einen  $w-v$ -Pfad (der Länge 0).

$k - 1 \sim k$ : Sei  $u = \text{parent}(v)$ . Da  $u$  vor  $v$  besucht wird, liefert **parent** nach IV einen  $w-u$ -Pfad  $P(u)$ . Wegen  $u = \text{parent}(v)$  ist  $u$  der Entdecker von  $v$  und daher mit  $v$  durch eine Kante verbunden. Somit liefert **parent** auch für  $v$  einen  $w-v$ -Pfad  $P(v)$ . ■

## 1.5 Spannbäume und Spannwälde

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass der Algorithmus **GraphSearch** für jede Zusammenhangskomponente eines (ungerichteten) Graphen  $G$  einen Spannbaum berechnet.

**Definition 17.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $H = (U, F)$  ein Untergraph.

- $H$  heißt **spannend**, falls  $U = V$  ist.
- $H$  ist ein **spannender Baum** (oder **Spannbaum**) von  $G$ , falls  $U = V$  und  $H$  ein Baum ist.
- $H$  ist ein **spannender Wald** (oder **Spannwald**) von  $G$ , falls  $U = V$  und  $H$  ein Wald ist.

Es ist leicht zu sehen, dass für  $G$  genau dann ein Spannbaum existiert, wenn  $G$  zusammenhängend ist. Allgemeiner gilt, dass die Spannbäume für die Zusammenhangskomponenten von  $G$  einen Spannwald

bilden. Dieser ist bzgl. der Subgraph-Relation maximal, da er in keinem größeren Spannwald enthalten ist. Ignorieren wir die Richtungen der Kanten im Suchwald  $W$ , so ist der resultierende Wald  $W'$  ein maximaler Spannwald für  $G$ .

Da  $\text{Explore}(w)$  alle von  $w$  aus erreichbaren Knoten findet, spannt jeder Baum des (ungerichteten) Suchwaldes  $W' = (V, E'_{\text{parent}})$  mit

$$E'_{\text{parent}} = \{\{\text{parent}(v), v\} \mid v \in V \text{ und } \text{parent}(v) \neq \perp\}$$

eine Zusammenhangskomponente von  $G$ .

**Korollar 18.** Sei  $G$  ein (ungerichteter) Graph.

- Der Algorithmus  $\text{GraphSearch}(V, E)$  berechnet in Linearzeit einen Spannwald  $W'$ , dessen Bäume die Zusammenhangskomponenten von  $G$  spannen.
- Falls  $G$  zusammenhängend ist, ist  $W'$  ein Spannbaum für  $G$ .

## 1.6 Berechnung der Zusammenhangskomponenten

Folgende Variante von  $\text{GraphSearch}$  bestimmt die Zusammenhangskomponenten eines (ungerichteten) Eingabographen  $G$ .

**Algorithmus CC( $V, E$ )**

---

```

1   $k := 0$ 
2  for all  $v \in V, e \in E$  do
3     $\text{cc}(v) := 0$ 
4     $\text{cc}(e) := 0$ 
5  for all  $w \in V$  do
6    if  $\text{cc}(w) = 0$  then
7       $k := k + 1$ 
8       $\text{ComputeCC}(k, w)$ 

```

---

**Prozedur ComputeCC( $k, w$ )**

---

```

1   $\text{cc}(w) := k$ 
2  Init( $B$ )
3  Insert( $B, w$ )
4  while  $\neg\text{Empty}(B)$  do
5     $u := \text{Element}(B)$ 
6    if  $\exists e = \{u, v\} \in E : \text{cc}(e) = 0$  then
7       $\text{cc}(e) := k$ 
8      if  $\text{cc}(v) = 0$  then
9         $\text{cc}(v) := k$ 
10       Insert( $B, v$ )
11    else
12      Remove( $B$ )

```

---

**Korollar 19.** Der Algorithmus  $\text{CC}(V, E)$  bestimmt für einen Graphen  $G = (V, E)$  in Linearzeit  $\mathcal{O}(n + m)$  sämtliche Zusammenhangskomponenten  $G_k = (V_k, E_k)$  von  $G$ , wobei  $V_k = \{v \in V \mid \text{cc}(v) = k\}$  und  $E_k = \{e \in E \mid \text{cc}(e) = k\}$  ist.

## 1.7 Breiten- und Tiefensuche

Wie wir gesehen haben, findet  $\text{Explore}(w)$  sowohl in Graphen als auch in Digraphen alle von  $w$  aus erreichbaren Knoten. Als nächstes zeigen wir, dass  $\text{Explore}(w)$  zu allen von  $w$  aus erreichbaren Knoten sogar einen kürzesten Weg findet, falls wir die Datenstruktur  $B$  als Warteschlange  $Q$  implementieren.

Die Benutzung einer Warteschlange  $Q$  zur Speicherung der bereits entdeckten, aber noch nicht abgearbeiteten Knoten bewirkt, dass zuerst alle Nachbarknoten  $u_1, \dots, u_k$  des aktuellen Knotens  $u$  besucht werden, bevor ein anderer Knoten aktueller Knoten wird. Da die Suche also zuerst in die Breite geht, spricht man von einer **Breitensuche** (kurz *BFS*, engl. *breadth first search*). Den hierbei berechneten

Suchwald bezeichnen wir als **Breitensuchwald**.

Bei Benutzung eines Kellers wird dagegen  $u_1$  aktueller Knoten, bevor die übrigen Nachbarknoten von  $u$  besucht werden. Daher führt die Benutzung eines Kellers zu einer **Tiefensuche** (kurz *DFS*, engl. *depth first search*). Der berechnete Suchwald heißt dann **Tiefensuchwald**.

Die Breitensuche eignet sich eher für Distanzprobleme wie z.B. das Finden

- kürzester Wege in Graphen und Digraphen,
- längster Wege in Bäumen (siehe Übungen) oder
- kürzester Wege in Distanzgraphen (Dijkstra-Algorithmus).

Dagegen liefert die Tiefensuche interessante Strukturinformationen wie z.B.

- die zweifachen Zusammenhangskomponenten in Graphen,
- die starken Zusammenhangskomponenten in Digraphen oder
- eine topologische Sortierung bei azyklischen Digraphen (s. Übungen).

Wir betrachten zuerst den Breitensuchalgorithmus.

### Algorithmus **BFS**( $V, E$ )

---

```

1  for all  $v \in V, e \in E$  do
2    vis( $v$ ) := false
3    parent( $v$ ) := ⊥
4    vis( $e$ ) := false
5  for all  $w \in V$  do
6    if vis( $w$ ) = false then BFS-Explore( $w$ )

```

---

### Prozedur **BFS-Explore**( $w$ )

---

```

1  vis( $w$ ) := true
2  QueueInit( $Q$ )
3  Enqueue( $Q, w$ )

```

---



---

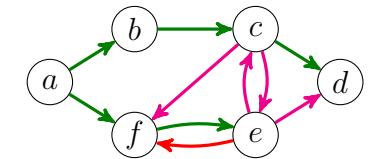
```

4  while ¬QueueEmpty( $Q$ ) do
5     $u := \text{Head}(Q)$ 
6    if  $\exists e = uv \in E : \text{vis}(e) = \text{false}$  then
7      vis( $e$ ) := true
8      if vis( $v$ ) = false then
9        vis( $v$ ) := true
10       parent( $v$ ) :=  $u$ 
11       Enqueue( $Q, v$ )
12    else
13      Dequeue( $Q$ )

```

---

**Beispiel 20.** **BFS-Explore** generiert bei Aufruf mit dem Startknoten  $a$  nebenstehenden Breitensuchwald.



Schlange $Q$	bes. Knoten	bes. Kante	Typ	$Q$	bes. Knoten	bes. Kante	Typ
← $a$ ←	$a$	( $a, b$ )	B	$c, e, d$	$c$	( $c, e$ )	Q
$a, b$	$a$	( $a, f$ )	B	$c, e, d$	$c$	( $c, f$ )	Q
$a, b, f$	$a$	-	-	$c, e, d$	$c$	-	-
$b, f$	$b$	( $b, c$ )	B	$e, d$	$e$	( $e, c$ )	Q
$b, f, c$	$b$	-	-	$e, d$	$e$	( $e, d$ )	Q
$f, c$	$f$	( $f, e$ )	B	$e, d$	$e$	( $e, f$ )	R
$f, c, e$	$f$	-	-	$e, d$	$e$	-	-
$c, e$	$c$	( $c, d$ )	B	$d$	$d$	-	-

◻

**Satz 21.** Sei  $G$  ein Graph oder Digraph und sei  $w$  Wurzel des von **BFS-Explore**( $w$ ) berechneten Suchbaumes  $T$ . Dann liefert **parent** für jeden Knoten  $v$  in  $T$  einen kürzesten  $w-v$ -Weg  $P(v)$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion über die kürzeste Weglänge  $\ell$  von  $w$  nach  $v$  in  $G$ .

$\ell = 0$ : Dann ist  $v = w$  und **parent** liefert einen Weg der Länge 0.

$\ell \sim \ell + 1$ : Sei  $v$  ein Knoten, der den Abstand  $\ell + 1$  von  $w$  in  $G$  hat.

Dann existiert ein Knoten  $u \in N^-(v)$  (bzw.  $u \in N(v)$ ) mit Abstand  $\ell$  von  $w$  in  $G$  hat. Nach IV liefert also **parent** einen  $w$ - $u$ -Weg  $P(u)$  der Länge  $\ell$ . Da  $u$  erst aus  $Q$  entfernt wird, nachdem alle Nachfolger von  $u$  entdeckt sind, wird  $v$  von  $u$  oder einem bereits zuvor in  $Q$  eingefügten Knoten  $z$  entdeckt. Da  $Q$  als Schlange organisiert ist, ist  $P(u)$  nicht kürzer als  $P(z)$ . Daher folgt in beiden Fällen, dass  $P(v)$  die Länge  $\ell + 1$  hat. ■

Wir werden später noch eine Modifikation der Breitensuche kennen lernen, die kürzeste Wege in Graphen mit nichtnegativen Kantenlängen findet (Algorithmus von Dijkstra).

Als nächstes betrachten wir den Tiefensuchalgorithmus.

#### Algorithmus **DFS**( $V, E$ )

---

```

1  for all  $v \in V, e \in E$  do
2    vis( $v$ ) := false
3    parent( $v$ ) := ⊥
4    vis( $e$ ) := false
5  for all  $w \in V$  do
6    if vis( $w$ ) = false then DFS-Explore( $w$ )

```

---

#### Prozedur **DFS-Explore**( $w$ )

---

```

1  vis( $w$ ) := true
2  StackInit( $S$ )
3  Push( $S, w$ )
4  while ¬StackEmpty( $S$ ) do
5     $u := \text{Top}(S)$ 
6    if  $\exists e = uv \in E : \text{vis}(e) = \text{false}$  then

```

---



---

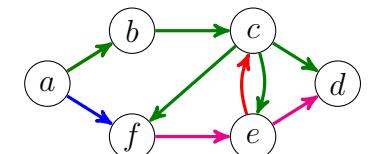
```

7      vis( $e$ ) := true
8      if vis( $v$ ) = false then
9        vis( $v$ ) := true
10       parent( $v$ ) :=  $u$ 
11       Push( $S, v$ )
12     else
13       Pop( $S$ )

```

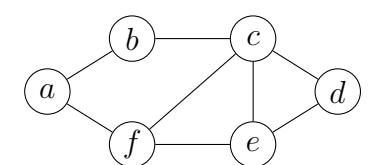
---

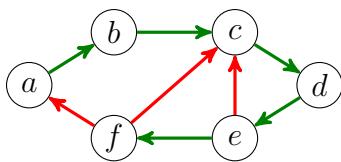
**Beispiel 22.** Bei Aufruf mit dem Startknoten  $a$  generiert die Prozedur **DFS-Explore** nebenstehenden Tiefensuchwald.



Keller $S$	bes. Knoten	bes. Kante	Typ	$S$	bes. Knoten	bes. Kante	Typ
$a \leftrightarrow$	$a$	$(a, b)$	<span style="color: green;">B</span>	$a, b, c$	$c$	$(c, f)$	<span style="color: green;">B</span>
$a, b$	$b$	$(b, c)$	<span style="color: green;">B</span>	$a, b, c, f$	$f$	$(f, e)$	<span style="color: magenta;">Q</span>
$a, b, c$	$c$	$(c, d)$	<span style="color: green;">B</span>	$a, b, c, f$	$f$	-	-
$a, b, c, d$	$d$	-	-	$a, b, c$	$c$	-	-
$a, b, c$	$c$	$(c, e)$	<span style="color: green;">B</span>	$a, b$	$b$	-	-
$a, b, c, e$	$e$	$(e, c)$	<span style="color: red;">R</span>	$a$	$a$	$(a, f)$	<span style="color: blue;">V</span>
$a, b, c, e$	$e$	$(e, d)$	<span style="color: magenta;">Q</span>	$a$	$a$	-	-
$a, b, c, e$	$e$	-	-				

Die Tiefensuche auf nebenstehendem Graphen führt auf folgende Klassifikation der Kanten (wobei wir annehmen,





dass die Nachbarknoten in den Adjazenzlisten alphabetisch angeordnet sind):

Keller $S$	Kante	Typ	Keller $S$	Kante	Typ
$a \leftrightarrow$	$\{a, b\}$	B	$a, b, c, d, e, f$	$\{f, c\}$	R
$a, b$	$\{b, a\}$	-	$a, b, c, d, e, f$	$\{f, e\}$	-
$a, b$	$\{b, c\}$	B	$a, b, c, d, e, f$	-	-
$a, b, c$	$\{c, b\}$	-	$a, b, c, d, e$	-	-
$a, b, c$	$\{c, d\}$	B	$a, b, c, d$	-	-
$a, b, c, d$	$\{d, c\}$	-	$a, b, c$	$\{c, e\}$	-
$a, b, c, d$	$\{d, e\}$	B	$a, b, c$	$\{c, f\}$	-
$a, b, c, d, e$	$\{e, c\}$	R	$a, b, c$	-	-
$a, b, c, d, e$	$\{e, d\}$	-	$a, b$	-	-
$a, b, c, d, e$	$\{e, f\}$	B	$a$	$\{a, f\}$	-
$a, b, c, d, e, f$	$\{f, a\}$	R	$a$	-	-

△

Die Tiefensuche lässt sich auch rekursiv implementieren. Dies hat den Vorteil, dass kein (expliziter) Keller benötigt wird.

#### Prozedur DFS-Explore-rec( $w$ )

---

```

1  vis( $w$ ) := true
2  while  $\exists e = uv \in E : \text{vis}(e) = \text{false}$  do
3    vis( $e$ ) := true
4    if vis( $v$ ) = false then
5      parent( $v$ ) :=  $w$ 
6      DFS-Explore-rec( $v$ )
  
```

---

Da **DFS-Explore-rec( $w$ )** zu **parent( $w$ )** zurück springt, kann auch das Feld **parent( $w$ )** als Keller fungieren. Daher lässt sich die Prozedur

auch nicht-rekursiv ohne zusätzlichen Keller implementieren, indem die Rücksprünge explizit innerhalb einer Schleife ausgeführt werden (siehe Übungen).

Bei der Tiefensuche lässt sich der Typ jeder Kante algorithmisch leicht bestimmen, wenn wir noch folgende Zusatzinformationen speichern.

- Ein neu entdeckter Knoten wird bei seinem ersten Besuch grau gefärbt. Sobald er abgearbeitet ist, also bei seinem letzten Besuch, wird er schwarz. Zu Beginn sind alle Knoten weiß.
- Zudem merken wir uns die Reihenfolge, in der die Knoten entdeckt werden, in einem Feld  $r$ .

Dann lässt sich der Typ jeder Kante  $e = (u, v)$  bei ihrem ersten Besuch wie folgt bestimmen:

**Baumkante:** farbe( $v$ ) = weiß,

**Vorwärtskante:** farbe( $v$ ) ≠ weiß und  $r(v) \geq r(u)$ ,

**Rückwärtskante:** farbe( $v$ ) = grau und  $r(v) < r(u)$ ,

**Querkante:** farbe( $v$ ) = schwarz und  $r(v) < r(u)$ .

Die folgende Variante von **DFS** berechnet diese Informationen.

---

#### Algorithmus DFS( $V, E$ )

---

```

1  r := 0
2  for all  $v \in V, e \in E$  do
3    farbe( $v$ ) := weiß
4    vis( $e$ ) := false
5  for all  $u \in V$  do
6    if farbe( $u$ ) = weiß then DFS-Explore( $u$ )
  
```

---



---

#### Prozedur DFS-Explore( $u$ )

---

```

1  farbe( $u$ ) := grau
2  r := r + 1
3  r( $u$ ) := r
4  while  $\exists e = (u, v) \in E : \text{vis}(e) = \text{false}$  do
  
```

---

```

5   vis(e) := true
6   if farbe(v) = weiß then
7       DFS-Explore(v)
8   farbe(u) := schwarz

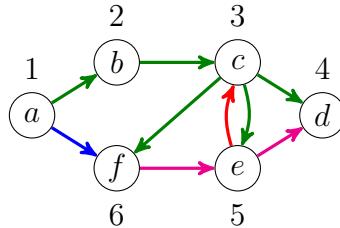
```

---

**Beispiel 23.** Bei Aufruf mit dem Startknoten  $a$  werden die Knoten im nebenstehenden Digraphen von der Prozedur **DFS-Explore** wie folgt gefärbt (die Knoten sind mit ihren  $r$ -Werten markiert).

Keller	Farbe	Kante	Typ
$a$	$a$ : grau	$(a, b)$	B
$a, b$	$b$ : grau	$(b, c)$	B
$a, b, c$	$c$ : grau	$(c, d)$	B
$a, b, c, d$	$d$ : grau $d$ : schwarz	-	-
$a, b, c$	-	$(c, e)$	B
$a, b, c, e$	$e$ : grau	$(e, c)$	R
$a, b, c, e$	-	$(e, d)$	Q

Keller	Farbe	Kante	Typ
$a, b, c, e$	$e$ : schwarz	-	-
$a, b, c$	-	$(c, f)$	B
$a, b, c, f$	$f$ : grau	$(f, e)$	Q
$a, b, c, f$	$f$ : schwarz	-	-
$a, b, c$	$c$ : schwarz	-	-
$a, b$	$b$ : schwarz	-	-
$a$	-	$(a, f)$	V
$a$	$a$ : schwarz	-	-



◀

Bei der Tiefensuche in ungerichteten Graphen können weder Quer- noch Vorwärtskanten auftreten. Da  $v$  beim ersten Besuch einer solchen Kante  $(u, v)$  nicht weiß ist und alle grauen Knoten auf dem **parent**-Pfad  $P(u)$  liegen, müsste  $v$  nämlich bereits schwarz sein. Dies ist aber nicht möglich, da die Kante  $\{u, v\}$  in  $v-u$ -Richtung noch gar nicht durchlaufen wurde. Folglich sind alle Kanten, die nicht zu einem neuen Knoten führen, Rückwärtskanten. Das Fehlen von Quer- und Vorwärtskanten spielt bei manchen Anwendungen eine wichtige Rolle, etwa bei der Zerlegung eines Graphen  $G$  in seine **zweifachen Zusammenhangskomponenten**.

## 2 Berechnung kürzester Wege

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, einen kürzesten Weg von einem Startknoten  $s$  zu einem Zielknoten  $t$  in einem Digraphen zu finden, dessen Kanten  $(u, v)$  vorgegebene **Längen**  $l(u, v)$  haben. Die Länge eines Weges  $W = (v_0, \dots, v_\ell)$  ist

$$l(W) = \sum_{i=0}^{\ell-1} l(v_i, v_{i+1}).$$

Die kürzeste Weglänge von  $s$  nach  $t$  wird als **Distanz**  $dist(s, t)$  zwischen  $s$  und  $t$  bezeichnet,

$$dist(s, t) = \min\{l(W) \mid W \text{ ist ein } s-t\text{-Weg}\}.$$

Falls kein  $s-t$ -Weg existiert, setzen wir  $dist(s, t) = \infty$ . Man beachte, dass die Distanz auch dann nicht beliebig klein werden kann, wenn Kreise mit negativer Länge existieren, da ein Weg jede Kante höchstens einmal durchlaufen kann. In vielen Fällen haben jedoch alle Kanten in  $E$  eine nichtnegative Länge  $l(u, v) \geq 0$ . In diesem Fall nennen wir  $D = (V, E, l)$  einen **Distanzgraphen**.

### 2.1 Der Dijkstra-Algorithmus

Der Dijkstra-Algorithmus findet einen kürzesten Weg  $P(u)$  von  $s$  zu allen erreichbaren Knoten  $u$  (*single-source shortest-path problem*). Hierzu führt der Algorithmus eine modifizierte Breitensuche aus. Dabei werden die in Bearbeitung befindlichen Knoten in einer Prioritätswarteschlange  $U$  verwaltet. Genauer werden alle Knoten  $u$ , zu denen

bereits ein  $s$ - $u$ -Weg  $P(u)$  bekannt ist, zusammen mit der Weglänge  $g$  solange in  $U$  gespeichert bis  $P(u)$  optimal ist. Auf der Datenstruktur  $U$  sollten folgende Operationen (möglichst effizient) ausführbar sein.

- Init( $U$ ):** Initialisiert  $U$  als leere Menge.
- Update( $U, u, g$ ):** Erniedrigt den Wert von  $u$  auf  $g$  (nur wenn der aktuelle Wert größer als  $g$  ist). Ist  $u$  noch nicht in  $U$  enthalten, wird  $u$  mit dem Wert  $g$  zu  $U$  hinzugefügt.
- RemoveMin( $U$ ):** Gibt ein Element aus  $U$  mit dem kleinsten Wert zurück und entfernt es aus  $U$  (ist  $U$  leer, wird der Wert  $\perp$  (nil) zurückgegeben).

Voraussetzung für die Korrektheit des Algorithmus ist, dass alle Kanten eine nichtnegative Länge haben. Während der Suche werden bestimmte Kanten  $e = (u, v)$  daraufhin getestet, ob  $g(u) + \ell(u, v) < g(v)$  ist. Da in diesem Fall die Kante  $e$  auf eine Herabsetzung von  $g(v)$  auf den Wert  $g(u) + \ell(u, v)$  „drängt“, wird diese Wertzuweisung als **Relaxation** von  $e$  bezeichnet. Welche Kanten  $(u, v)$  auf Relaxation getestet werden, wird beim Dijkstra-Algorithmus durch eine einfache Greedystrategie bestimmt: Wähle  $u$  unter allen noch nicht fertigen Knoten mit minimalem  $g$ -Wert und teste alle Kanten  $(u, v)$ , für die  $v$  nicht schon fertig ist.

### Algorithmus Dijkstra( $V, E, l, s$ )

---

```

1  for all  $v \in V$  do
2     $g(v) := \infty$ 
3     $\text{parent}(v) := \perp$ 
4     $\text{done}(v) := \text{false}$ 
5   $g(s) := 0$ 
6  Init( $P$ )
7  Update( $P, s, 0$ )
8  while  $u := \text{RemoveMin}( $P$ ) \neq \perp$  do
9     $\text{done}(u) := \text{true}$ 
```

---

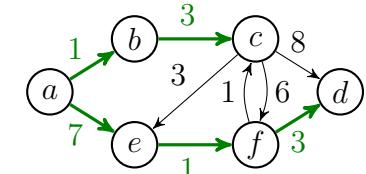
```

10   for all  $v \in N^+(u)$  do
11     if  $\text{done}(v) = \text{false} \wedge g(u) + l(u, v) < g(v)$  then
12        $g(v) := g(u) + l(u, v)$ 
13       Update( $P, v, g(v)$ )
14        $\text{parent}(v) := u$ 
```

---

Der Algorithmus speichert die aktuelle Länge des Pfades  $P(u)$  in  $g(u)$ . Knoten außerhalb des aktuellen Breitensuchbaums  $T$  haben den Wert  $g(u) = \infty$ . In jedem Schleifendurchlauf wird in Zeile 8 ein Knoten  $u$  mit minimalem  $g$ -Wert aus  $U$  entfernt und als fertig markiert. Anschließend werden alle von  $u$  wegführenden Kanten  $e = (u, v)$  auf Relaxation getestet sowie  $g$ ,  $U$  und  $T$  gegebenenfalls aktualisiert.

**Beispiel 24.** Betrachte den nebenstehenden Distanzgraphen  $G$ . Bei Ausführung des Dijkstra-Algorithmus mit dem Startknoten  $a$  werden die folgenden kürzesten Wege berechnet.



Inhalt von $P$	entfernt	besuchte Kanten	Update-Op.
$(a, 0)$	$(a, 0)$	$(a, b), (a, e)$	$(b, 1), (e, 7)$
$(b, 1), (e, 7)$	$(b, 1)$	$(b, c)$	$(c, 4)$
$(c, 4), (e, 7)$	$(c, 4)$	$(c, d), (c, e), (c, f)$	$(d, 12), (f, 10)$
$(e, 7), (f, 10), (d, 12)$	$(e, 7)$	$(e, f)$	$(f, 8)$
$(f, 8), (d, 12)$	$(f, 8)$	$(f, c), (f, d)$	$(d, 11)$
$(d, 11)$	$(d, 11)$	—	—

Als nächstes beweisen wir die Korrektheit des Dijkstra-Algorithmus.

**Satz 25.** Sei  $D = (V, E, l)$  ein Distanzgraph und sei  $s \in V$ . Dann berechnet **Dijkstra**( $V, E, l, s$ ) im Feld **parent** für alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten  $t \in V$  einen kürzesten  $s$ - $t$ -Weg  $P(t)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten  $t \in V$  zu  $U$  hinzugefügt werden. Dies folgt aus der Tatsache, dass  $s$  zu

$U$  hinzugefügt wird, und spätestens dann, wenn ein Knoten  $u$  in Zeile 8 aus  $U$  entfernt wird, sämtliche Nachfolger von  $u$  zu  $U$  hinzugefügt werden.

Zudem ist klar, dass  $g(u) \geq dist(s, u)$  ist, da  $P(u)$  im Fall  $g(u) < \infty$  ein  $s-u$ -Weg der Länge  $g(u)$  ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass  $P(u)$  für jeden aus  $U$  entfernten Knoten  $u$  ein kürzester  $s-u$ -Weg ist, d.h. es gilt  $g(u) \leq dist(s, u)$ .

Hierzu zeigen wir induktiv über die Anzahl  $k$  der vor  $u$  aus  $U$  entfernten Knoten, dass  $g(u) \leq dist(s, u)$  ist.

$k = 0$ : In diesem Fall ist  $u = s$  und  $P(u)$  hat die Länge  $g(u) = 0$ .

$k - 1 \sim k$ : Sei  $W = v_0, \dots, v_\ell = u$  ein kürzester  $s-u$ -Weg in  $G$  und sei  $v_i$  der Knoten mit maximalem Index  $i$  auf diesem Weg, der vor  $u$  aus  $P$  entfernt wird.

Nach IV gilt dann

$$g(v_i) = dist(s, v_i). \quad (2.1)$$

Zudem ist

$$g(v_{i+1}) \leq g(v_i) + l(v_i, v_{i+1}). \quad (2.2)$$

Da  $u$  im Fall  $u \neq v_{i+1}$  vor  $v_{i+1}$  aus  $P$  entfernt wird, ist

$$g(u) \leq g(v_{i+1}). \quad (2.3)$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} g(u) &\stackrel{(2.3)}{\leq} g(v_{i+1}) \stackrel{(2.2)}{\leq} g(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} dist(s, v_i) + l(v_i, v_{i+1}) \\ &= dist(s, v_{i+1}) \leq dist(s, u). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Um die Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus abzuschätzen, überlegen wir uns zuerst, wie oft die einzelnen Operationen auf der Datenstruktur  $P$  ausgeführt werden. Sei  $n = \|V\|$  die Anzahl der Knoten und  $m = \|E\|$  die Anzahl der Kanten des Eingabegraphen.

- Die **Init**-Operation wird nur einmal ausgeführt.
- Da die while-Schleife für jeden von  $s$  aus erreichbaren Knoten genau einmal durchlaufen wird, wird die **RemoveMin**-Operation höchstens  $\min\{n, m\}$ -mal ausgeführt.
- Wie die Prozedur **BFS-Explore** besucht der Dijkstra-Algorithmus jede Kante maximal einmal. Daher wird die **Update**-Operation höchstens  $m$ -mal ausgeführt.

**Beobachtung 26.** Bezeichne  $Init(n)$ ,  $RemoveMin(n)$  und  $Update(n)$  den Aufwand zum Ausführen der Operationen **Init**, **RemoveMin** und **Update** für den Fall, dass  $P$  nicht mehr als  $n$  Elemente aufzunehmen hat. Dann ist die Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus durch

$\mathcal{O}(n + m + Init(n) + \min\{n, m\} \cdot RemoveMin(n) + m \cdot Update(n))$  beschränkt.

Die Laufzeit hängt also wesentlich davon ab, wie wir die Datenstruktur  $U$  implementieren. Falls alle Kanten die gleiche Länge haben, wachsen die Distanzwerte der Knoten monoton in der Reihenfolge ihres (ersten) Besuchs. D.h. wir können  $U$  als Warteschlange implementieren. Dies führt wie bei der Prozedur **BFS-Explore** auf eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n + m)$ .

Für den allgemeinen Fall, dass die Kanten unterschiedliche Längen haben, betrachten wir folgende drei Möglichkeiten.

1. Da die Felder  $g$  und **done** bereits alle zur Verwaltung von  $U$  benötigten Informationen enthalten, kann man auf die (explizite) Implementierung von  $U$  auch verzichten. In diesem Fall kostet die **RemoveMin**-Operation allerdings Zeit  $\mathcal{O}(n)$ , was auf eine Gesamtaufzeit von  $\mathcal{O}(n^2)$  führt.

Dies ist asymptotisch optimal, wenn  $G$  relativ dicht ist, also  $m = \Omega(n^2)$  Kanten enthält. Ist  $G$  dagegen relativ dünn, d.h.  $m = o(n^2)$ , so empfiehlt es sich,  $U$  als Prioritätswarteschlange zu implementieren.

2. Es ist naheliegend,  $U$  in Form eines Heaps  $H$  zu implementieren. In diesem Fall lässt sich die Operation **RemoveMin** in Zeit  $\mathcal{O}(\log n)$  implementieren. Da die Prozedur **Update** einen linearen Zeitaufwand erfordert, ist es effizienter, sie durch eine **Insert**-Operation zu simulieren. Dies führt zwar dazu, dass derselbe Knoten evtl. mehrmals mit unterschiedlichen Werten in  $H$  gespeichert wird. Die Korrektheit bleibt aber dennoch erhalten, wenn wir nur die erste Entnahme eines Knotens aus  $H$  beachten und die übrigen ignorieren.

Da für jede Kante höchstens ein Knoten in  $H$  eingefügt wird, erreicht  $H$  maximal die Größe  $n^2$  und daher sind die Heap-Operationen **Insert** und **RemoveMin** immer noch in Zeit  $\mathcal{O}(\log n^2) = \mathcal{O}(\log n)$  ausführbar. Insgesamt erhalten wir somit eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n + m \log n)$ , da sowohl **Insert** als auch **RemoveMin** maximal  $m$ -mal ausgeführt werden.

Die Laufzeit von  $\mathcal{O}(n + m \log n)$  bei Benutzung eines Heaps ist zwar für dünne Graphen sehr gut, aber für dichte Graphen schlechter als die implizite Implementierung von  $U$  mithilfe der Felder  $g$  und **done**.

3. Als weitere Möglichkeit kann  $U$  auch in Form eines so genannten *Fibonacci-Heaps*  $F$  implementiert werden. Dieser benötigt nur eine konstante amortisierte Laufzeit  $\mathcal{O}(1)$  für die **Update**-Operation und  $\mathcal{O}(\log n)$  für die **RemoveMin**-Operation. Insgesamt führt dies auf eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(m + n \log n)$ . Allerdings sind Fibonacci-Heaps erst bei sehr großen Graphen mit mittlerer Dichte schneller.

	implizit	Heap	Fibonacci-Heap
<b>Init</b>	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
<b>Update</b>	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(1)$
<b>RemoveMin</b>	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Gesamtaufzeit	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$

Die Tabelle fasst die Laufzeiten des Dijkstra-Algorithmus für die verschiedenen Möglichkeiten zur Implementation der Datenstruktur  $U$  zusammen. Eine offene Frage ist, ob es auch einen Algorithmus mit linearer Laufzeit  $\mathcal{O}(n + m)$  zur Bestimmung kürzester Wege in Distanzgraphen gibt.

## 2.2 Der Bellman-Ford-Algorithmus

In manchen Anwendungen treten negative Kantengewichte auf. Geben die Kantengewichte beispielsweise die mit einer Kante verbundenen Kosten wider, so kann ein Gewinn durch negative Kosten modelliert werden. Auf diese Weise lassen sich auch längste Wege in Distanzgraphen berechnen, indem man alle Kantenlängen  $l(u, v)$  mit  $-1$  multipliziert und in dem resultierenden Graphen einen kürzesten Weg bestimmt.

Die Komplexität des Problems hängt wesentlich davon ab, ob man (gerichtete) Kreise mit negativer Länge zulässt oder nicht. Falls negative Kreise zugelassen werden, ist das Problem NP-hart. Andernfalls existieren effiziente Algorithmen wie z.B. der Bellman-Ford-Algorithmus (BF-Algorithmus) oder der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus (BFM-Algorithmus). Diese Algorithmen lösen das single-source shortest-path Problem mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm)$  im schlechtesten Fall.

Der Ford-Algorithmus arbeitet ganz ähnlich wie der Dijkstra-Algorithmus, betrachtet aber jede Kante nicht wie dieser nur einmal, sondern eventuell mehrmals. In seiner einfachsten Form sucht der Algorithmus wiederholt eine Kante  $e = (u, v)$  mit

$$g(u) + \ell(u, v) < g(v)$$

und aktualisiert den Wert von  $g(v)$  auf  $g(u) + \ell(u, v)$  (Relaxation). Die Laufzeit hängt dann wesentlich davon ab, in welcher Reihenfolge die Kanten auf Relaxation getestet werden. Im besten Fall lässt sich eine lineare Laufzeit erreichen (z.B. wenn der zugrunde liegende Digraph

azyklisch ist). Bei der Bellman-Ford-Variante wird in  $\mathcal{O}(nm)$  Schritten ein kürzester Weg von  $s$  zu allen erreichbaren Knoten gefunden (sofern keine negativen Kreise existieren).

Wir zeigen induktiv über die Anzahl  $k$  der Kanten eines kürzesten  $s$ - $u$ -Weges, dass  $g(u) = \text{dist}(s, u)$  gilt, falls  $g$  für alle Kanten  $(u, v)$  die Dreiecksungleichung  $g(v) \leq g(u) + \ell(u, v)$  erfüllt (also keine Relaxationen mehr möglich sind).

Im Fall  $k = 0$  ist nämlich  $u = s$  und somit  $g(s) = 0 = \text{dist}(s, s)$ . Im Fall  $k > 0$  sei  $v$  ein Knoten, dessen kürzester  $s$ - $v$ -Weg  $W$  aus  $k$  Kanten besteht. Dann gilt nach IV für den Vorgänger  $u$  von  $v$  auf  $W$   $g(u) = \text{dist}(s, u)$ . Aufgrund der Dreiecksungleichung folgt dann

$$g(v) \leq g(u) + \ell(u, v) = \text{dist}(s, u) + \ell(u, v) = \text{dist}(s, v).$$

Aus dem Beweis folgt zudem, dass nach Relaxation aller Kanten eines kürzesten  $s$ - $v$ -Weges  $W$  (in der Reihenfolge, in der die Kanten in  $W$  durchlaufen werden) den Wert  $\text{dist}(s, v)$  hat. Dies gilt auch für den Fall, dass zwischendurch noch weitere Kantenrelaxationen stattfinden.

Der Bellman-Ford-Algorithmus prüft in  $n - 1$  Iterationen jeweils alle Kanten auf Relaxation. Sind in der  $n$ -ten Runde noch weitere Relaxationen möglich, muss ein negativer Kreis existieren. Die Laufzeit ist offensichtlich  $\mathcal{O}(nm)$  und die Korrektheit folgt leicht durch Induktion über die minimale Anzahl von Kanten eines kürzesten  $s$ - $t$ -Weges. Zudem wird bei jeder Relaxation einer Kante  $(u, v)$  der Vorgänger  $u$  im Feld  $\text{parent}(v)$  vermerkt, so dass sich ein kürzester Weg von  $s$  zu allen erreichbaren Knoten (bzw. ein negativer Kreis) rekonstruieren lässt.

### Algorithmus BF( $V, E, l, s$ )

---

```

1  for all  $v \in V$  do
2     $g(v) := \infty$ 
3     $\text{parent}(v) := \perp$ 
4     $g(s) := 0$ 
5  for  $i := 1$  to  $n - 1$  do

```

---

```

6    for all  $(u, v) \in E$  do
7      if  $g(u) + l(u, v) < g(v)$  then
8         $g(v) := g(u) + l(u, v)$ 
9         $\text{parent}(v) := u$ 
10   for all  $(u, v) \in E$  do
11     if  $g(u) + l(u, v) < g(v)$  then
12       error(es gibt einen negativen Kreis)

```

---

### 2.3 Der Bellman-Ford-Moore-Algorithmus

Die BFM-Variante prüft in jeder Runde nur diejenigen Kanten  $(u, v)$  auf Relaxation, für die  $g(u)$  in der vorigen Runde erniedrigt wurde. Dies führt auf eine deutliche Verbesserung der durchschnittlichen Laufzeit. Wurde nämlich  $g(u)$  in der  $(i - 1)$ -ten Runde nicht verringert, dann steht in der  $i$ -ten Runde sicher keine Relaxation der Kante  $(u, v)$  an. Es liegt nahe, die in der nächsten Runde zu prüfenden Knoten  $u$  in einer Schlange  $Q$  zu speichern. Dabei kann mit  $u$  auch die aktuelle Rundenzahl  $i$  in  $Q$  gespeichert werden. In Runde 0 wird der Startknoten  $s$  in  $Q$  eingefügt. Können in Runde  $n$  immer noch Kanten relaxiert werden, so bricht der Algorithmus mit der Fehlermeldung ab, dass negative Kreise existieren. Da die BFM-Variante die Kanten in derselben Reihenfolge relaxiert wie der BF-Algorithmus, führt sie auf dasselbe Ergebnis.

### Algorithmus BFM( $V, E, l, s$ )

---

```

1  for all  $v \in V$  do
2     $g(v) := \infty$ ,  $\text{parent}(v) := \perp$ ,  $\text{inQueue}(v) := \text{false}$ 
3     $g(s) := 0$ ,  $\text{Init}(Q)$ ,  $\text{Enqueue}(Q, (0, s))$ ,  $\text{inQueue}(s) := \text{true}$ 
4  while  $(i, u) := \text{Dequeue}(Q) \neq \perp$  and  $i < n$  do
5     $\text{inQueue}(u) := \text{false}$ 
6    for all  $v \in N^+(u)$  do
7      if  $g(u) + l(u, v) < g(v)$  then

```

```

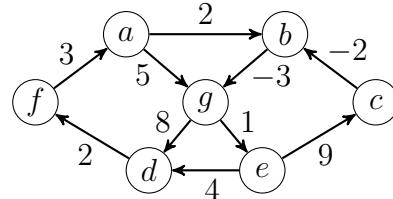
8      $g(v) := g(u) + l(u, v)$ 
9      $\text{parent}(v) := u$ 
10    if  $\text{inQueue}(v) = \text{false}$  then
11        Enqueue( $Q, (i + 1, v)$ )
12        inQueue(v) := true
13    if  $i = n$  then
14        error(es gibt einen negativen Kreis)

```

---

Für kreisfreie Graphen lässt sich eine lineare Laufzeit  $\mathcal{O}(n + m)$  erreichen, indem die Nachfolger in Zeile 6 in topologischer Sortierung gewählt werden. Dies bewirkt, dass jeder Knoten höchstens einmal in die Schlange eingefügt wird.

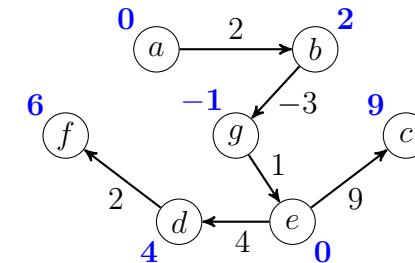
**Beispiel 27.** Betrachte untenstehenden kantenbewerteten Digraphen mit dem Startknoten  $a$ .



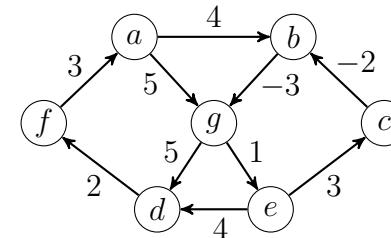
Die folgende Tabelle zeigt jeweils den Inhalt der Schlange  $Q$ , bevor der BFM-Algorithmus das nächste Paar  $(i, u)$  von  $Q$  entfernt. Dabei enthält jeder Eintrag  $(i, u, v, g)$  neben der Rundenzahl  $i$  und dem Knoten  $u$  auch noch den **parent**-Knoten  $v$  und den  $g$ -Wert von  $u$ , obwohl diese nicht in  $Q$  gespeichert werden.

$\uparrow$	$(0, a, \perp, 0)$	$\uparrow$	$(1, b, a, 2)$	$\uparrow$	$(1, g, a, 5)$	$\uparrow$	$(1, g, b, -1)$	$\uparrow$	$(2, d, g, 7)$
(2, e, g, 0)	(3, f, d, 9)	(3, f, d, 9)	(3, c, d, 9)	(3, c, d, 9)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(4, f, d, 6)	(2, e, g, 0)
(3, f, d, 9)	(3, c, d, 9)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(4, f, d, 6)	(2, e, g, 0)
(3, c, d, 9)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(4, f, d, 6)	(2, e, g, 0)
(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(3, d, e, 4)	(4, f, d, 6)	(2, e, g, 0)

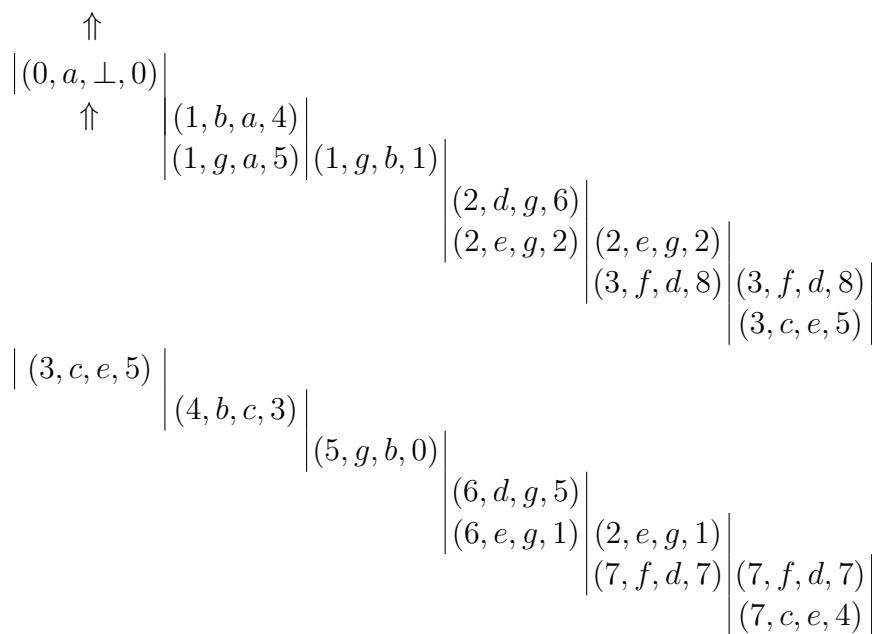
Die berechneten Entfernungswerte mit den zugehörigen **parent**-Pfaden sind in folgendem Suchbaum wiedergegeben:



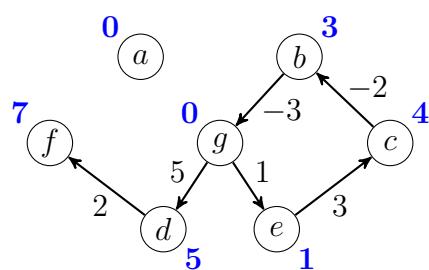
Als nächstes betrachten wir den folgenden Digraphen:



Da dieser einen negativen Kreis enthält, der vom Startknoten aus erreichbar ist, lassen sich die Entfernungswerte zu allen Knoten, die von diesem Kreis aus erreichbar sind, beliebig verkleinern.



Da nun der Knoten  $f$  mit der Rundenzahl  $i = n = 7$  aus der Schlange entnommen wird, bricht der Algorithmus an dieser Stelle mit der Meldung ab, dass negative Kreise existieren. Ein solcher Kreis (im Beispiel:  $g, e, c, b, g$ ) lässt sich bei Bedarf anhand der **parent**-Funktion aufspüren, indem wir den **parent**-Weg zu  $f$  zurückverfolgen:  $f, d, g, b, c, e, g$ .



△

## 2.4 Der Floyd-Warshall-Algorithmus

Der Algorithmus von Floyd-Warshall berechnet die Distanzen zwischen allen Knoten unter der Voraussetzung, dass keine negativen Kreise existieren.

**Algorithmus Floyd-Warshall( $V, E, l$ )**

---

```

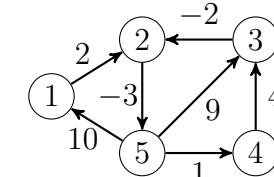
1  for i := 1 to n do
2      for j := 1 to n do
3          if (i,j) ∈ E then d0(i,j) := l(i,j) else d0(i,j) := ∞
4  for k := 1 to n do
5      for i := 1 to n do
6          for j := 1 to n do
7              dk(i,j) = min {dk-1(i,j), dk-1(i,k) + dk-1(k,j)}

```

---

Hierzu speichert der Algorithmus in  $d_k(i,j)$  die Länge eines kürzesten Weges von  $i$  nach  $j$ , der außer  $i$  und  $j$  nur Knoten  $\leq k$  besucht. Die Laufzeit ist offenbar  $\mathcal{O}(n^3)$ . Da die  $d_k$ -Werte nur von den  $d_{k-1}$ -Werten abhängen, ist der Speicherplatzbedarf  $\mathcal{O}(n^2)$ . Die Existenz negativer Kreise lässt sich daran erkennen, dass mindestens ein Diagonalelement  $d_k(i,i)$  einen negativen Wert erhält.

**Beispiel 28.** Betrachte folgenden kantenbewerteten Digraphen:



$d_0$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	$\infty$	9	1	$\infty$

$d_1$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	12	9	1	$\infty$

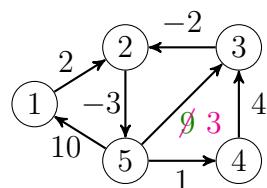
$d_2$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	12	9	1	9

$d_3$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	2	4	$\infty$	-1
5	10	7	9	1	4

$d_4$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	2	4	$\infty$	-1
5	10	3	5	1	0

$d_5$	1	2	3	4	5
1	9	2	4	0	-1
2	7	0	2	-2	-3
3	5	-2	0	-4	-5
4	9	2	4	0	-1
5	10	3	5	1	0

Als nächstes betrachten wir folgenden Digraphen:



$d_0$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	$\infty$	3	1	$\infty$

$d_1$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	12	3	1	$\infty$

$d_2$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
5	10	12	3	1	9

$d_3$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	2	4	$\infty$	-1
5	10	7	9	1	4

$d_4$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	-1
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-3
3	$\infty$	-2	$\infty$	$\infty$	-5
4	$\infty$	2	4	$\infty$	-1
5	10	3	5	1	0

$d_5$	1	2	3	4	5
1	9	0	2	0	-3
2	7	-2	0	-2	-5
3	5	-4	-2	-4	-7
4	9	0	2	0	-3
5	8	-1	1	-1	-4

Wegen  $d_3(5, 5) = -2$  liegt der Knoten 5 auf einem negativen Kreis. Folglich ist die Weglänge nicht für alle Knotenpaare nach unten beschränkt.  $\triangleleft$

Ohne großen Mehraufwand lassen sich auch die kürzesten Wege selbst berechnen, indem man in einem Feld  $\text{parent}[i, j]$  den Vorgänger von  $j$  auf einem kürzesten Weg von  $i$  nach  $j$  speichert (falls ein Weg von  $i$  nach  $j$  existiert). Eine elegantere Möglichkeit besteht jedoch darin, die Kantenfunktion  $l$  in eine äquivalente Distanzfunktion  $l'$  zu transformieren, die keine negativen Werte annimmt, aber dieselben kürzesten Wege in  $G$  wie  $l$  hat. Da wir für diese Transformation nur alle kürzesten Wege von einem festen Knoten  $s$  zu allen anderen Knoten berechnen müssen, ist sie in Zeit  $O(nm)$  durchführbar.

### 3 Matchings

**Definition 29.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Zwei Kanten  $e, e' \in E$  heißen **unabhängig**, falls  $e \cap e' = \emptyset$  ist.
- Eine Kantenmenge  $M \subseteq E$  heißt **Matching** in  $G$ , falls alle Kanten in  $M$  paarweise unabhängig sind.
- Ein Knoten  $v \in V$  heißt **gebunden**, falls  $v$  Endpunkt einer Matchingkante (also  $v \in \bigcup M$ ) ist und sonst **frei**.
- $M$  heißt **perfekt**, falls alle Knoten von  $G$  gebunden sind (also  $V = \bigcup M$  ist).
- Die Matchingzahl von  $G$  ist

$$\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

- Ein Matching  $M$  heißt **maximal**, falls  $\|M\| = \mu(G)$  ist.  $M$  heißt **gesättigt**, falls es in keinem größeren Matching enthalten ist.

Offensichtlich ist  $M \subseteq E$  genau dann ein Matching, wenn  $\|\bigcup M\| = 2\|M\|$  ist. Das Ziel besteht nun darin, ein maximales Matching  $M$  in  $G$  zu finden.

**Beispiel 30.** Ein gesättigtes Matching muss nicht maximal sein:



$M = \{\{v, w\}\}$  ist gesättigt, da es sich nicht erweitern lässt.  $M$  ist jedoch kein maximales Matching, da  $M' = \{\{v, x\}, \{u, w\}\}$  größer ist.

Die Greedy-Methode, ausgehend von  $M = \emptyset$  solange Kanten zu  $M$  hinzuzufügen, bis sich  $M$  nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also nicht.

Es gibt jedoch eine Methode, mit der sich jedes Matching, das nicht maximal ist, vergrößern lässt.

**Definition 31.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $M$  ein Matching in  $G$ .

1. Ein Pfad  $P = (u_1, \dots, u_k)$  heißt **alternierend**, falls für  $i = 1, \dots, k-1$  gilt:

$$e_i = \{u_i, u_{i+1}\} \in M \Leftrightarrow e_{i+1} = \{u_{i+1}, u_{i+2}\} \in E \setminus M.$$

2. Ein Kreis  $C = (u_1, \dots, u_k)$  heißt **alternierend**, falls der Pfad  $P = (u_1, \dots, u_{k-1})$  alternierend ist und zusätzlich gilt:

$$e_1 \in M \Leftrightarrow e_{k-1} \in E \setminus M.$$

3. Ein alternierender Pfad  $P$  heißt **vergrößernd**, falls weder  $e_1$  noch  $e_{k-1}$  zu  $M$  gehören.

**Satz 32.** Ein Matching  $M$  in  $G$  ist genau dann maximal, wenn es keinen vergrößernden Pfad in  $G$  bzgl.  $M$  gibt.

*Beweis.* Ist  $P$  ein vergrößernder Pfad, so liefert  $M' = M \Delta P$  ein Matching der Größe  $\|M'\| = \|M\| + 1$  in  $G$ . Hierbei identifizieren wir  $P$  mit der Menge  $\{e_i \mid i = 1, \dots, k-1\}$  der auf  $P = (u_1, \dots, u_k)$  liegenden Kanten  $e_i = \{u_i, u_{i+1}\}$ .

Ist dagegen  $M$  nicht maximal und  $M'$  ein größeres Matching, so betrachten wir die Kantenmenge  $M \Delta M'$ . Da jeder Knoten in dem Graphen  $G' = (V, M \Delta M')$  höchstens den Grad 2 hat, lässt sich die Kantenmenge  $M \Delta M'$  in disjunkte Kreise und Pfade partitionieren. Da diese Kreise und Pfade alternierend sind, und  $M'$  größer als  $M$  ist, muss mindestens einer dieser Pfade zunehmend sein. ■

Damit haben wir das Problem, ein maximales Matching in einem Graphen  $G$  zu finden, auf das Problem reduziert, zu einem Matching  $M$  in  $G$  einen vergrößernden Pfad zu finden, sofern ein solcher existiert. Der Algorithmus von Edmonds bestimmt einen vergrößernden Pfad wie folgt. Jeder Knoten  $v$  hat einen von 3 Zuständen, welcher entweder mit gerade (falls  $v$  frei ist) oder unerreicht (falls  $v$  gebunden ist) initialisiert wird. Dann wird ausgehend von den freien Knoten als Wurzeln ein Suchwald  $W$  aufgebaut, indem für einen beliebigen geraden Knoten  $v$  eine Kante zu einem Knoten  $v'$  besucht wird, der entweder ebenfalls gerade oder unerreicht ist.

Ist  $v'$  unerreicht, so wird der aktuelle Suchwald  $W$  um die beiden Kanten  $(v, v')$  und  $(v', M(v'))$  erweitert, wobei  $M(v')$  der Matchingpartner von  $v'$  ist (d.h.  $\{v', M(v')\} \in M$ ). Zudem wechselt der Zustand von  $v'$  von unerreicht zu ungerade und der von  $M(v')$  von unerreicht zu gerade. Damit wird erreicht, dass jeder Knoten in  $W$  genau dann gerade (bzw. ungerade) ist, wenn der Abstand zu seiner Wurzel in  $W$  gerade (bzw. ungerade) ist.

Ist  $v'$  dagegen gerade, so gibt es zwei Unterfälle. Sind die beiden Wurzeln von  $v$  und  $v'$  verschieden, so wurde ein vergrößernder Pfad gefunden, der von der Wurzel von  $v$  zu  $v$  über  $v'$  zur Wurzel von  $v'$  verläuft.

Andernfalls befindet sich  $v'$  im gleichen Suchbaum wie  $v$ , d.h. es gibt einen gemeinsamen Vorfahren  $v''$ , so dass durch Verbinden der beiden Pfade von  $v''$  nach  $v$  und von  $v''$  nach  $v'$  zusammen mit der Kante  $\{v, v'\}$  ein Kreis  $C$  entsteht. Da  $v$  und  $v'$  beide gerade sind, hat  $C$  eine ungerade Länge. Zudem muss auch  $v''$  gerade sein, da jeder ungerade Knoten in  $W$  genau ein Kind hat. Der Pfad von der Wurzel von  $v''$  zu  $v''$  zusammen mit dem Kreis  $C$  wird als **Blume** mit der **Blüte**  $C$  bezeichnet. Der Knoten  $v''$  heißt **Basis** der Blüte  $C$ .

Zwar führt das Auffinden einer Blüte  $C$  nicht direkt zu einem vergrößernden Pfad, sie bedeutet aber dennoch einen Fortschritt, da sich der Graph wie folgt vereinfachen lässt. Wir **kontrahieren**  $C$

zu einem einzelnen geraden Knoten  $b$ , der die Nachbarschaften aller Knoten in  $C$  zu Knoten außerhalb von  $C$  erbt, und setzen die Suche nach einem vergrößernden Pfad fort. Bezeichnen wir den aus  $G$  durch Kontraktion von  $C$  entstandenen Graphen mit  $G_C$  und das aus  $M$  durch Kontraktion von  $C$  entstandene Matching in  $G_C$  mit  $M_C$ , so stellt folgendes Lemma die Korrektheit dieser Vorgehensweise sicher.

**Lemma 33.** *In  $G$  lässt sich ausgehend von  $M$  genau dann ein vergrößernder Pfad finden, wenn dies in  $G_C$  ausgehend von  $M_C$  möglich ist. Zudem kann jeder vergrößernde Pfad in  $G_C$  zu einem vergrößernden Pfad in  $G$  expandiert werden.*

*Beweis.* Sei  $P$  ein vergrößernder Pfad in  $G_C$ . Falls  $P$  nicht den Knoten  $b$  besucht, zu dem die Blüte  $C$  kontrahiert wurde, so ist  $P$  auch ein vergrößernder Pfad in  $G$ . Besucht  $P$  dagegen den Knoten  $b$ , so betrachten wir die beiden Nachbarn  $a$  und  $c$  von  $b$  in  $P$  (o.B.d.A sei  $\{a, b\} \in M_C$ ). Dann existiert in  $M$  eine Kante zwischen  $a$  und der Basis  $v''$  von  $C$ . Zudem gibt es in  $C$  mindestens einen Nachbarn  $v_c$  von  $c$ . Im Fall  $v'' = v_c$  genügt es,  $b$  durch  $v''$  zu ersetzen. Andernfalls ersetzen wir  $b$  durch denjenigen der beiden Pfade  $P_1$  und  $P_2$  von  $v''$  nach  $v_c$  auf  $C$ , der  $v_c$  über eine Matchingkante erreicht. Falls  $b$  Endknoten von  $P$  ist, also nur einen Nachbarn  $c$  in  $P$  hat, ersetzen wir  $b$  durch den gleichen Pfad.

Der Beweis der Rückrichtung ist komplizierter, da viele verschiedene Fälle möglich sind. Alternativ ergibt sich die Rückrichtung aber auch als Folgerung aus der Korrektheit des Edmonds-Algorithmus (siehe Satz 36). ■

Die folgende Prozedur **VergrößernderPfad** berechnet einen vergrößernden Pfad für  $G$ , falls das aktuelle Matching  $M$  nicht maximal ist. Da  $M$  nicht mehr als  $n/2$  Kanten enthalten kann, wird diese Prozedur höchstens  $(n/2 + 1)$ -mal aufgerufen. In den Übungen wird gezeigt, dass die Prozedur die Laufzeit  $O(m)$  hat, woraus sich eine Gesamtlaufzeit von  $O(nm)$  für den Edmonds-Algorithmus ergibt.

---

**Prozedur VergrößernderPfad( $G, M$ )**


---

```

1  $Q \leftarrow \emptyset$ 
2 for  $v \in V(G)$  do
3   if  $\exists e \in M : v \in e$  then  $\text{zustand}(v) \leftarrow \text{unerreicht}$ 
4   else
5      $\text{zustand}(v) \leftarrow \text{gerade}$ 
6      $\text{root}(v) \leftarrow v$ 
7      $\text{depth}(v) \leftarrow 0$ 
8     for  $u \in N(v)$  do  $Q \leftarrow Q \cup \{(v, u)\}$ 
9 while  $Q \neq \emptyset$  do
10   entferne eine Kante  $(v, v')$  aus  $Q$ 
11   if  $\text{zustand}(v') = \text{ungerade}$  or
12      $\text{inblüte}(v) = \text{inblüte}(v') \neq \perp$  then // tue
13       nichts
14     else if  $\text{zustand}(v') = \text{unerreicht}$  then
15        $\text{zustand}(v') \leftarrow \text{ungerade}$ 
16        $\text{parent}(v') \leftarrow v$ 
17        $\text{root}(v') \leftarrow \text{root}(v)$ 
18        $\text{depth}(v') \leftarrow \text{depth}(v) + 1$ 
19        $v'' \leftarrow \text{partner}(v')$ 
20        $\text{zustand}(v'') \leftarrow \text{gerade}$ 
21        $\text{parent}(v'') \leftarrow v'$ 
22        $\text{root}(v'') \leftarrow \text{root}(v')$ 
23        $\text{depth}(v'') \leftarrow \text{depth}(v') + 1$ 
24       for  $u \in N(v'') \setminus \{v'\}$  do  $Q \leftarrow Q \cup \{(v'', u)\}$ 
25     else //  $\text{zustand}(v') = \text{gerade}$ 
26       if  $\text{root}(v) = \text{root}(v')$  then //  $v$  und  $v'$  sind im
27         gleichen Baum: kontrahiere Blüte
           $v'' \leftarrow \text{tiefster gemeinsamer Vorfahr von } v \text{ und } v'$ 
          // verwende  $\text{depth}(v)$  und  $\text{depth}(v')$ 
           $b \leftarrow \text{neuer Knoten}$ 
           $\text{blüte}(b) \leftarrow (v'', \dots, v, v', \dots, v'')$  // setze die
            beiden Pfade entlang der Baum-Kanten zu

```

---

```

28   einem ungeraden Kreis zusammen
29    $\text{parent}(b) \leftarrow \text{parent}(v'')$ 
30    $\text{root}(b) \leftarrow \text{root}(v'')$ 
31    $\text{depth}(b) \leftarrow \text{depth}(v'')$ 
32   for  $u \in \text{blüte}(b)$  do
33      $\text{inblüte}(u) \leftarrow b$ 
34     if  $\text{zustand}(u) = \text{ungerade}$  then
35        $\text{zustand}(u) \leftarrow \text{gerade}$ 
36       for  $w \in N(u)$  do  $Q \leftarrow Q \cup \{(u, w)\}$ 
37   else // vergrößernder Pfad gefunden, muss noch
38     expandiert werden
39    $P \leftarrow \text{leere doppelt verkettete Liste}$ 
40    $u \leftarrow v$ 
41   while  $u \neq \perp$  do
42     while  $\text{inblüte}(u) \neq \perp$  do  $u \leftarrow \text{inblüte}(u)$ 
43     hänge  $u$  vorne an  $P$  an
44      $u \leftarrow \text{parent}(u)$ 
45      $u \leftarrow v'$ 
46     while  $u \neq \perp$  do
47       while  $\text{inblüte}(u)$  do  $u \leftarrow \text{inblüte}(u)$ 
48       hänge  $u$  hinten an  $P$  an
49        $u \leftarrow \text{parent}(u)$ 
50      $u \leftarrow \text{der erste Knoten auf } P$ 
51     while  $u \neq \perp$  do
52       if  $\text{blüte}(u) = \perp$  then
53          $u \leftarrow \text{succ}_P(u)$ 
54       else //  $\text{blüte}(u) = (v_0, \dots, v_k)$  mit  $v_0 = v_k$ 
55         ersetze  $u$  in  $P$  durch den alternierenden
          Pfad in  $\text{blüte}(u)$ , der  $\text{pred}_P(u)$  und
           $\text{succ}_P(u)$  verbindet und auf der Nicht-
          Basis-Seite mit einer Kante aus  $M$  endet
           $u \leftarrow \text{der erste Knoten dieses Pfads}$ 

```

---

Für den Beweis der Korrektheit des Edmonds-Algorithmus benötigen wir den Begriff des OSC.

**Definition 34.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Menge  $S = \{v_1, \dots, v_k, V_1, \dots, V_\ell\}$  von Knoten  $v_1, \dots, v_k \in V$  und Teilmengen  $V_1, \dots, V_\ell \subseteq V$  heißt **OSC** (engl. odd set cover) in  $G$ , falls

1.  $\forall e \in E : e \cap V_0 \neq \emptyset \vee \exists i \geq 1 : e \subseteq V_i$ , wobei  $V_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ .
2.  $\forall i \geq 1 : n_i \equiv_2 1$ , wobei  $n_i = \|V_i\|$ .

Das **Gewicht** von  $S$  ist  $\text{weight}(S) = k + \sum_{i=1}^{\ell} (n_i - 1)/2$ . Im Fall  $\ell = 0$  nennen wir  $V_0$  auch **Knotenüberdeckung** (oder kurz **VC** für engl. vertex cover) in  $G$ .

**Lemma 35.** Für jedes Matching  $M$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  und jedes OSC  $S$  in  $G$  gilt  $\|M\| \leq \text{weight}(S)$ .

*Beweis.*  $M$  kann für jeden Knoten  $v_j \in S$  höchstens eine Kante und von den Kanten in  $V_i$ ,  $i \geq 1$ , höchstens  $(n_i - 1)/2$  Kanten enthalten. ■

**Satz 36.** Der Algorithmus von Edmonds berechnet ein maximales Matching  $M$  für  $G$ .

*Beweis.* Es ist klar, dass der Algorithmus von Edmonds terminiert. Wir analysieren die Struktur des Suchwalds zu diesem Zeitpunkt. Jede Kante  $e \in E$  lässt sich in genau eine von drei Kategorien einteilen:

1.  $e$  hat mindestens einen ungeraden Endpunkt,
2. beide Endpunkte von  $e$  sind unerreicht,
3.  $e$  liegt komplett innerhalb einer Blüte.

Würde nämlich  $e$  keine dieser 3 Bedingungen erfüllen, so würde der Algorithmus nicht terminieren, da alle Kanten  $e = (v, v')$ , die mindestens einen geraden Endpunkt  $v$  haben, von dem Algorithmus betrachtet werden und im Fall,

1. dass auch  $v'$  gerade ist,  $e$  entweder zur Kontraktion einer weiteren Blüte oder zu einem vergrößernden Pfad führen

2. dass  $v'$  unerreicht ist,  $v'$  in einen ungeraden Knoten verwandelt würde. Folglich können wir ein OSC  $S$  wie folgt konstruieren. Sei  $U$  die Menge der unerreichten Knoten. Jede Blüte bildet eine Menge  $V_i$  in  $S$  und jeder ungerade Knoten wird als Einzelknoten zu  $S$  hinzugefügt. Falls  $U$  nicht leer ist, fügen wir einen beliebigen unerreichten Knoten  $u_0 \in U$  als Einzelknoten zu  $S$  hinzu. Falls  $U$  mindestens 4 Knoten enthält, fügen wir auch die Menge  $U \setminus \{u_0\}$  zu  $S$  hinzu.

Nun ist leicht zu sehen, dass  $S$  alle Kanten überdeckt und jeder Einzelknoten in  $S$  mit einer Matchingkante inzident. Da zudem jede Blüte  $V_i$  der Größe  $n_i$  genau  $(n_i - 1)/2$  (und auch die Menge  $U \setminus \{u_0\}$  im Fall  $\|U\| \geq 4$  genau  $(\|U\| - 2)/2$ ) Matchingkanten enthält, folgt  $\text{weight}(S) = \|M\|$ . ■

**Korollar 37.** Für jeden Graphen  $G$  gilt

$$\mu(G) = \min\{\text{weight}(S) \mid S \text{ ist ein OSC in } G\}.$$

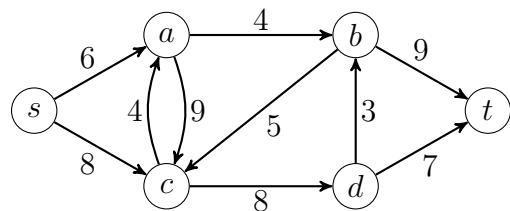
Ein Spezialfall hiervon ist der Satz von König für bipartite Graphen (siehe Übungen).

Der Algorithmus von Edmonds lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er nicht nur ein maximales Matching  $M$ , sondern auch ein OSC  $S$  ausgibt, das die Optimalität von  $M$  beweist. In den Übungen werden wir noch eine weitere Möglichkeit zur „Zertifizierung“ der Optimalität von  $M$  kennenlernen.

## 4 Flüsse in Netzwerken

**Definition 38.** Ein **Netzwerk**  $N = (V, E, s, t, c)$  besteht aus einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer **Quelle**  $s \in V$  und einer **Senke**  $t \in V$  sowie einer **Kapazitätsfunktion**  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ . Zudem muss jede Kante  $(u, v) \in E$  positive Kapazität  $c(u, v) > 0$  und jede Nichtkante  $(u, v) \notin E$  muss die Kapazität  $c(u, v) = 0$  haben.

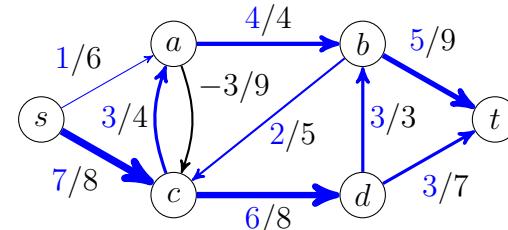
Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk  $N$ .



**Definition 39.**

- a) Ein **Fluss in  $N$**  ist eine Funktion  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  mit
  - $f(u, v) \leq c(u, v)$ , (Kapazitätsbedingung)
  - $f(u, v) = -f(v, u)$ , (Antisymmetrie)
  - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$  für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$  (Kontinuität)
- b) Der **Fluss in den Knoten  $u$**  ist  $f^-(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v, u)\}$ .
- c) Der **Fluss aus  $u$**  ist  $f^+(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$ .
- d) Der **Nettofluss durch  $u$**  ist  $f^+(u) - f^-(u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$ .
- e) Die **Größe von  $f$**  ist  $|f| = f^+(s) - f^-(s)$ .

Die Antisymmetrie impliziert, dass  $f(u, u) = 0$  für alle  $u \in V$  ist, d.h. wir können annehmen, dass  $G$  schlingenfrei ist. Die folgende Abbildung zeigt einen Fluss  $f$  in  $N$ .



$u$	$s$	$a$	$b$	$c$	$d$	$t$
$f^+(u)$	8	4	7	9	6	0
$f^-(u)$	0	4	7	9	6	8

### 4.1 Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

Wie lässt sich für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  entscheiden, ob er vergrößert werden kann? Diese Frage lässt sich leicht beantworten, falls  $f$  der konstante Nullfluss  $f = 0$  ist: In diesem Fall genügt es, in  $G = (V, E)$  einen Pfad von  $s$  nach  $t$  zu finden. Andernfalls können wir zu  $N$  und  $f$  ein Netzwerk  $N_f$  konstruieren, so dass  $f$  genau dann vergrößert werden kann, wenn sich in  $N_f$  der Nullfluss vergrößern lässt.

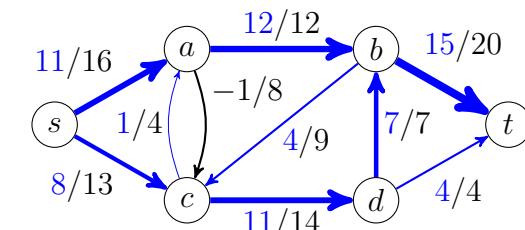
**Definition 40.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $f$  ein Fluss in  $N$ . Das zugeordnete **Restnetzwerk** ist  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  mit der Kapazität

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

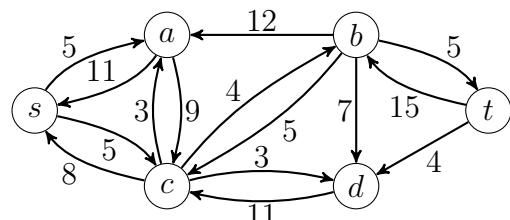
und der Kantenmenge

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}.$$

Zum Beispiel führt der Fluss



auf das folgende Restnetzwerk  $N_f$ :



**Definition 41.** Sei  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  ein Restnetzwerk. Dann heißt jeder  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $(V, E_f)$  **Zunahmepfad** in  $N_f$ . Die **Kapazität von  $P$  in  $N_f$**  ist

$$c_f(P) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

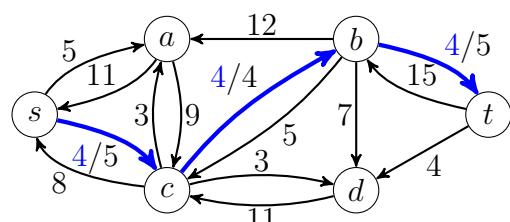
und der zu  $P$  gehörige **Fluss in  $N_f$**  ist

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c_f(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P, \\ -c_f(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$P = (u_0, \dots, u_k)$  ist also genau dann ein Zunahmepfad in  $N_f$ , falls

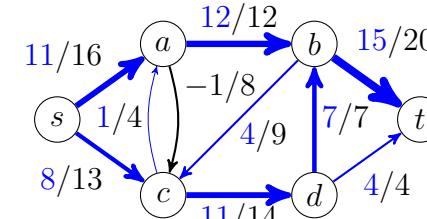
- $u_0 = s$  und  $u_k = t$  ist,
- die Knoten  $u_0, \dots, u_k$  paarweise verschieden sind
- und  $c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$  für  $i = 0, \dots, k-1$  ist.

Die folgende Abbildung zeigt den zum Zunahmepfad  $P = s, c, b, t$  gehörigen Fluss  $f_P$  in  $N_f$ . Die Kapazität von  $P$  ist  $c_f(P) = 4$ .

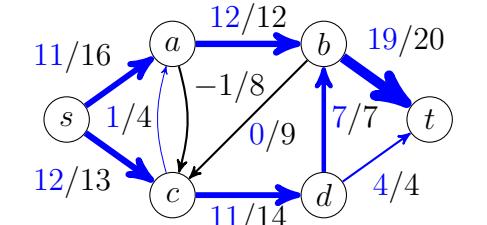


Es ist leicht zu sehen, dass  $f_P$  tatsächlich ein Fluss in  $N_f$  ist. Durch Addition der beiden Flüsse  $f$  und  $f_P$  erhalten wir einen Fluss  $f' = f + f_P$  in  $N$  der Größe  $|f'| = |f| + |f_P| > |f|$ .

Fluss  $f$ :



Fluss  $f + f_P$ :



Nun können wir den **Ford-Fulkerson-Algorithmus** angeben.

**Algorithmus Ford-Fulkerson** ( $V, E, s, t, c$ )

---

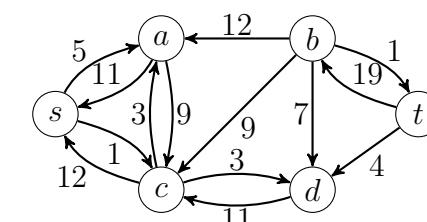
```

1 for all  $(u, v) \in V \times V$  do
2    $f(u, v) := 0$ 
3 while es gibt einen Zunahmepfad  $P$  in  $N_f$  do
4    $f := f + f_P$ 

```

---

**Beispiel 42.** Für den neuen Fluss erhalten wir nun folgendes Restnetzwerk:



In diesem existiert kein Zunahmepfad mehr.  $\triangleleft$

Um zu beweisen, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss berechnet, zeigen wir, dass es nur dann im Restnetzwerk  $N_f$  keinen Zunahmepfad mehr gibt, wenn der Fluss  $f$  maximal ist. Hierzu benötigen wir den Begriff des Schnitts.

**Definition 43.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$ . Dann heißt die Menge  $E(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$  **Kantenschnitt** (oder einfach **Schnitt**; oft wird auch einfach  $S$  als **Schnitt** bezeichnet). Die **Kapazität eines Schnittes  $S$**  ist

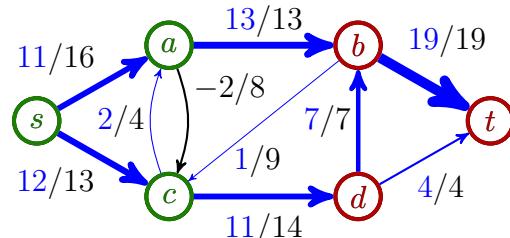
$$c(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} c(u, v).$$

Ist  $f$  ein Fluss in  $N$ , so heißt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v)$$

der **Nettofluss** (oder einfach **Fluss**) durch den **Schnitt  $S$** .

**Beispiel 44.** Betrachte den Schnitt  $S = \{s, a, c\}$  in folgendem Netzwerk  $N$  mit dem Fluss  $f$ :



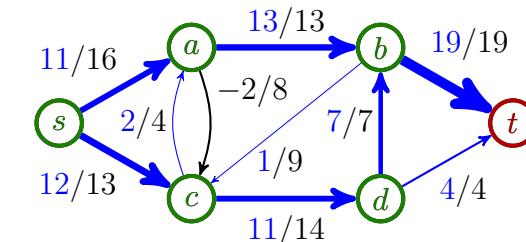
Dieser Schnitt hat die Kapazität

$$c(S) = c(a, b) + c(c, d) = 13 + 14 = 27$$

und der Fluss  $f(S)$  durch diesen Schnitt ist

$$f(S) = f(a, b) + f(c, d) = 13 - 1 + 11 = 23.$$

Dagegen hat der Schnitt  $S' = \{s, a, b, c, d\}$



die Kapazität

$$c(S') = c(b, t) + c(d, t) = 19 + 4 = f(b, t) + f(d, t) = f(S'),$$

die mit dem Fluss durch diesen Schnitt übereinstimmt.  $\triangleleft$

**Lemma 45.** Für jeden Schnitt  $S$  mit  $s \in S, t \notin S$  und jedem Fluss  $f$  gilt

$$|f| = f(S) \leq c(S).$$

**Beweis.** Die Gleichheit  $|f| = f(S)$  zeigen wir durch Induktion über  $k = \|S\|$ .

$k = 1$ : In diesem Fall ist  $S = \{s\}$  und somit

$$|f| = f^+(s) - f^-(s) = \sum_{v \in V} f(s, v) = \underbrace{f(s, s)}_{=0} + \sum_{v \neq s} f(s, v) = f(S).$$

$k - 1 \rightsquigarrow k$ : Sei  $S$  ein Schnitt mit  $\|S\| = k > 1$  und sei  $w \in S - \{s\}$ . Betrachte den Schnitt  $S' = S - \{w\}$ . Dann gilt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{v \notin S} f(w, v)$$

und

$$f(S') = \sum_{u \in S', v \notin S'} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{u \in S'} f(u, w).$$

Wegen  $f(w, w) = 0$  ist  $\sum_{u \in S'} f(u, w) = \sum_{u \in S} f(u, w)$  und daher

$$f(S) - f(S') = \sum_{v \notin S} f(w, v) - \sum_{u \in S} f(u, w) = \sum_{v \in V} f(w, v) = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt somit  $f(S) = f(S') = |f|$ .

Schließlich folgt wegen  $f(u, v) \leq c(u, v)$  die Ungleichung

$$f(S) = \sum_{(u,v) \in E(S)} f(u, v) \leq \sum_{(u,v) \in E(S)} c(u, v) = c(S).$$

■

**Satz 46** (Min-Cut-Max-Flow-Theorem). *Sei  $f$  ein Fluss in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $f$  ist maximal.
2. In  $N_f$  existiert kein Zunahmepfad.
3. Es gibt einen Schnitt  $S$  mit  $c(S) = |f|$ .

*Beweis.* Die Implikation „1 ⇒ 2“ ist klar, da die Existenz eines Zunahmepfads zu einer Vergrößerung von  $f$  führen würde.

Für die Implikation „2 ⇒ 3“ betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}.$$

Da in  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert, gilt dann

- $s \in S, t \notin S$  und
- $c_f(u, v) = 0$  für alle  $u \in S$  und  $v \notin S$ .

Wegen  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$  folgt somit

$$|f| = f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S, v \notin S} c(u, v) = c(S).$$

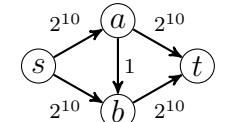
Die Implikation „3 ⇒ 1“ ist wiederum klar, da im Fall  $c(S) = |f|$  für jeden Fluss  $f'$  die Abschätzung  $|f'| = f'(S) \leq c(S) = |f|$  gilt. ■

Der obige Satz gilt auch für Netzwerke mit Kapazitäten in  $\mathbb{R}^+$ .

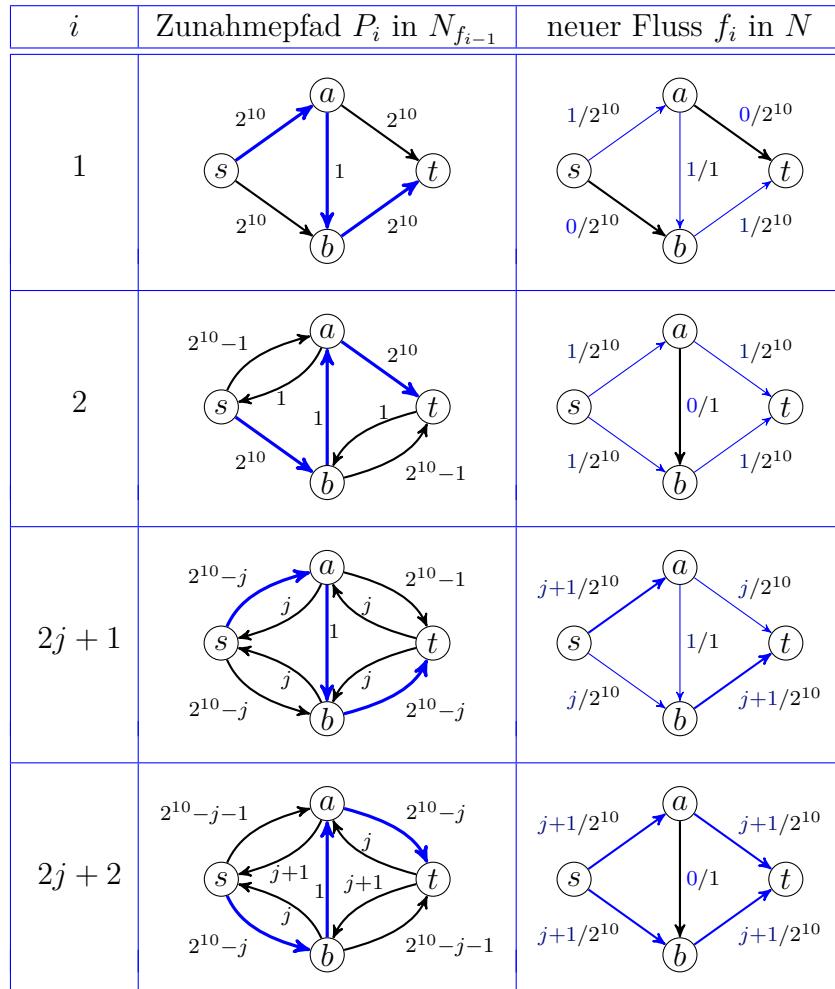
Sei  $c_0 = c(S)$  die Kapazität des Schnittes  $S = \{s\}$ . Dann durchläuft der Ford-Fulkerson-Algorithmus die while-Schleife höchstens  $c_0$ -mal. Bei jedem Durchlauf ist zuerst das Restnetzwerk  $N_f$  und danach ein Zunahmepfad in  $N_f$  zu berechnen.

Die Berechnung des Zunahmepfads  $P$  kann durch Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$  erfolgen. Da sich das Restnetzwerk nur entlang von  $P$  ändert, kann es in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  aktualisiert werden. Jeder Durchlauf benötigt also Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ , was auf eine Gesamtaufzeit von  $\mathcal{O}(c_0(n + m))$  führt. Da der Wert von  $c_0$  jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes  $N$ ) sein kann, ergibt dies keine polynomielle Zeitschranke. Bei Netzwerken mit Kapazitäten in  $\mathbb{R}^+$  kann der Ford-Fulkerson-Algorithmus sogar unendlich lange laufen (siehe Übungen).

Bei nebenstehendem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximalflusses abhängig von der Wahl der Zunahmepfade zwischen 2 und  $2^{11}$  Schleifendurchläufe.



Im günstigsten Fall wird nämlich zuerst der Zunahmepfad  $(s, a, t)$  und dann der Pfad  $(s, b, t)$  gewählt. Im ungünstigsten Fall werden abwechselnd die beiden Zunahmepfade  $(s, a, b, t)$  und  $(s, b, a, t)$  gewählt:



Nicht nur in diesem Beispiel lässt sich die exponentielle Laufzeit wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität. Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in  $n, m$  und  $\log c_0$  ist.
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad im Restnetzwerk mittels Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ . Diese

Vorgehensweise führt auf den *Edmonds-Karp-Algorithmus*, der eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm^2)$  hat (unabhängig von der Kapazitätsfunktion).

- Man bestimmt in jeder Iteration einen Fluss  $g$  im Restnetzwerk  $N_f$ , der nur Kanten benutzt, die auf einem kürzesten  $s-t$ -Pfad in  $N_f$  liegen. Zudem hat  $g$  die Eigenschaft, dass  $g$  auf jedem kürzesten  $s-t$ -Pfad  $P$  mindestens eine Kante  $e \in P$  blockiert (d.h. der Fluss  $g(e)$  durch  $e$  schöpft die Restkapazität  $c_f(e)$  von  $e$  vollkommen aus), weshalb diese Kante in der nächsten Iteration fehlt. Dies führt auf den *Algorithmus von Dinic*. Da die Länge der kürzesten  $s-t$ -Pfade im Restnetzwerk in jeder Iteration um mindestens 1 zunimmt, liegt nach spätestens  $n - 1$  Iterationen ein maximaler Fluss vor. Dinic hat gezeigt, dass ein blockierender Fluss  $g$  in Zeit  $\mathcal{O}(nm)$  bestimmt werden kann. Folglich hat der Algorithmus von Dinic eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2m)$ . Malhotra, Kumar und Maheswari fanden später einen  $\mathcal{O}(n^2)$ -Algorithmus zur Bestimmung eines blockierenden Flusses. Damit lässt sich die Gesamlaufzeit auf  $\mathcal{O}(n^3)$  verbessern.

## 4.2 Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Der Edmonds-Karp-Algorithmus beschränkt die Suche nach  $P$  auf kürzeste Zunahmepfade. Ansonsten ist er mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus identisch.

---

**Algorithmus Edmonds-Karp**( $V, E, s, t, c$ )

---

```

1   for all  $(u, v) \in V \times V$  do
2      $f(u, v) := 0$ 
3   repeat
4      $P \leftarrow \text{zunahmepfad}(f)$ 
5     if  $P \neq \perp$  then add( $f, P$ )
6   until  $P = \perp$ 

```

---

**Prozedur** zunahmepfad( $f$ )

---

```

1  for all  $v \in V$ ,  $e \in E \cup E^R$  do
2    vis( $v$ ) := vis( $e$ ) := false
3    parent( $v$ ) :=  $\perp$ 
4  vis( $s$ ) := true
5  QueueInit( $Q$ )
6  Enqueue( $Q, s$ )
7  while  $\neg$ QueueEmpty( $Q$ )  $\wedge$  Head( $Q$ )  $\neq t$  do
8     $u := \text{Head}(Q)$ 
9    if  $\exists e = uv \in E \cup E^R : \text{vis}(e) = \text{false}$  then
10      vis( $e$ ) := true
11      if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{vis}(v) = \text{false}$  then
12         $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
13        vis( $v$ ) := true
14        parent( $v$ ) :=  $u$ 
15        Enqueue( $Q, v$ )
16      else Dequeue( $Q$ )
17    if Head( $Q$ ) =  $t$  then
18       $P := \text{parent-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
19       $c_f(P) := \min\{c'(e) \mid e \in P\}$ 
20    else
21       $P := \perp$ 
22  return  $P$ 
```

---

**Prozedur** add( $f, P$ )

---

```

1  for all  $e \in P$  do
2     $f(e) := f(e) + c_f(P)$ 
3     $f(e^R) := f(e^R) - c_f(P)$ 
```

---

**Satz 47.** Der Edmonds-Karp-Algorithmus durchläuft die repeat-Schleife höchstens  $nm/2$ -mal.

*Beweis.* Sei  $f_0$  der triviale Fluss und seien  $P_1, \dots, P_k$  die Zunahme-

pfade, die der Edmonds-Karp-Algorithmus der Reihe nach berechnet, d.h.  $f_i = f_{i-1} + f_{P_i}$ . Eine Kante  $e$  heißt **kritisch** in  $P_i$ , falls der Fluss  $f_{P_i}$  die Kante  $e$  sättigt, d.h.  $c_{f_{i-1}}(e) = f_{P_i}(e) = c_{f_{i-1}}(P_i)$ . Man beachte, dass eine kritische Kante  $e$  in  $P_i$  wegen  $c_{f_i}(e) = c_{f_{i-1}}(e) - f_{P_i}(e) = 0$  nicht in  $N_{f_i}$  enthalten ist, wohl aber  $e^R$ .

Wir überlegen uns zunächst, dass die Längen  $\ell_i$  von  $P_i$  (schwach) monoton wachsen. Hierzu beweisen wir die stärkere Behauptung, dass sich die Abstände jedes Knotens  $u \in V$  von  $s$  und von  $t$  beim Übergang von  $N_{f_{i-1}}$  zu  $N_{f_i}$  nicht verringern können. Sei  $d_i(u, v)$  die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N_{f_{i-1}}$ .

**Behauptung 48.** Für jeden Knoten  $u \in V$  gilt  $d_{i+1}(s, u) \geq d_i(s, u)$  und  $d_{i+1}(u, t) \geq d_i(u, t)$ .

Hierzu zeigen wir folgende Behauptung.

**Behauptung 49.** Falls die Kante  $e = (u_j, u_{j+1})$  auf einem kürzesten Pfad  $P = (u_0, \dots, u_h)$  von  $s = u_0$  nach  $u = u_h$  in  $N_{f_i}$  liegt (d.h.  $d_{i+1}(s, u_{j+1}) = d_{i+1}(s, u_j) + 1$ ), dann gilt  $d_i(s, u_{j+1}) \leq d_i(s, u_j) + 1$ .

Die Behauptung ist klar, wenn die Kante  $e = (u_j, u_{j+1})$  auch in  $N_{f_{i-1}}$  enthalten ist. Ist dies nicht der Fall, muss  $f_{i-1}(e) \neq f_i(e)$  sein, d.h.  $e$  oder  $e^R$  müssen in  $P_i$  vorkommen. Da  $e$  nicht in  $N_{f_{i-1}}$  ist, muss  $e^R = (u_{j+1}, u_j)$  auf  $P_i$  liegen. Da  $P_i$  ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N_{f_{i-1}}$  ist, folgt  $d_i(s, u_j) = d_i(s, u_{j+1}) + 1$ , was  $d_i(s, u_{j+1}) = d_i(s, u_j) - 1 \leq d_i(s, u_j) + 1$  impliziert.

Damit ist Behauptung 49 bewiesen und es folgt

$$d_i(s, u) \leq d_i(s, u_{h-1}) + 1 \leq \dots \leq d_i(s, s) + h = h = d_{i+1}(s, u).$$

Die Ungleichung  $d_{i+1}(u, t) \geq d_i(u, t)$  folgt analog, womit auch Behauptung 48 bewiesen ist. Als nächstes zeigen wir folgende Behauptung.

**Behauptung 50.** Für  $1 \leq i < j \leq k$  gilt: Falls  $e = (u, v)$  in  $P_i$  und  $e^R = (v, u)$  in  $P_j$  enthalten ist, so ist  $\ell_j \geq \ell_i + 2$ .

Dies folgt direkt aus Behauptung 48:

$$l_j = d_j(s, t) = d_j(s, v) + d_j(u, t) + 1 \geq \underbrace{d_i(s, v)}_{d_i(s,u)+1} + \underbrace{d_i(u, t)}_{d_i(s,v)+1} + 1 = l_i + 2.$$

Da jeder Zunahmepfad  $P_i$  mindestens eine kritische Kante enthält und  $E \cup E^R$  höchstens  $m$  Kantenpaare der Form  $\{e, e^R\}$  enthält, impliziert schließlich folgende Behauptung, dass  $k \leq mn/2$  ist.

**Behauptung 51.** *Zwei Kanten  $e$  und  $e^R$  sind zusammen höchstens  $n/2$ -mal kritisch.*

Seien  $P_{i_1}, \dots, P_{i_h}$  die Pfade, in denen  $e$  oder  $e^R$  kritisch ist. Falls  $k \in \{e, e^R\}$  kritisch in  $P_{i_j}$  ist, dann fällt  $k$  aus  $N_{f_{i_{j+1}}}$  heraus. Damit also  $e$  oder  $e^R$  kritisch in  $P_{i_{j+1}}$  sein können, muss ein Pfad  $P_{j'}$  mit  $i_j < j' \leq i_{j+1}$  existieren, der  $k^R$  enthält. Wegen Behauptung 48 und Behauptung 50 ist  $\ell_{i_{j+1}} \geq \ell_{j'} \geq \ell_{i_j} + 2$ . Daher ist

$$n - 1 \geq \ell_{i_h} \geq \ell_{i_1} + 2(h - 1) \geq 1 + 2(h - 1) = 2h - 1,$$

was  $h \leq n/2$  impliziert. ■

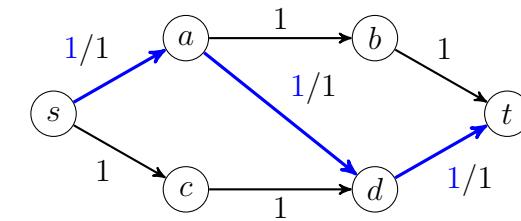
Man beachte, dass der Beweis auch bei Netzwerken mit reellen Kapazitäten seine Gültigkeit behält.

### 4.3 Der Algorithmus von Dinic

Man kann zeigen, dass sich in jedem Netzwerk ein maximaler Fluss durch Addition von höchstens  $m$  Zunahmepfaden  $P_i$  konstruieren lässt. Es ist nicht bekannt, ob sich jeder solche Pfad  $P_i$  in Zeit  $O(n + m)$  bestimmen lässt. Wenn ja, würde dies auf eine Gesamtlaufzeit von  $O(n + m^2)$  führen. Für dichte Netzwerke (d.h.  $m = \Theta(n^2)$ ) hat der Algorithmus von Dinic die gleiche Laufzeit  $O(n^2m) = O(n^4)$  und die verbesserte Version ist mit  $O(n^3)$  sogar noch schneller.

**Definition 52.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $g$  ein Fluss in  $N$ .  $g$  **sättigt** eine Kante  $e \in E$ , falls  $g(e) = c(e)$  ist.  $g$  heißt **blockierend**, falls  $g$  auf jedem Pfad  $P$  von  $s$  nach  $t$  mindestens eine Kante  $e \in E$  sättigt.

Nach dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem gibt es zu jedem maximalen Fluss  $f$  einen Schnitt  $S$ , so dass alle Kanten in  $E(S)$  gesättigt sind. Da jeder Pfad von  $s$  nach  $t$  mindestens eine Kante in  $E(S)$  enthalten muss, ist jeder maximale Fluss auch blockierend. Für die Umkehrung gibt es jedoch einfache Gegenbeispiele, wie etwa



Ein blockierender Fluss muss also nicht unbedingt maximal sein. Tatsächlich ist  $g$  genau dann ein blockierender Fluss in  $N$ , wenn es im Restnetzwerk  $N_g$  keinen Zunahmepfad gibt, der nur aus Vorwärtskanten  $e \in E$  mit  $g(e) < c(e)$  besteht. Wir werden sehen, dass sich ein blockierender Fluss in Zeit  $O(n^2)$  berechnen lässt.

Der Algorithmus von Dinic arbeitet wie folgt.

**Algorithmus Dinic**  $(V, E, s, t, c)$

---

```

1  for all  $(u, v) \in V \times V$  do
2       $f(u, v) := 0$ 
3  while schichtnetzwerk( $f$ ) do
4       $g := \text{blockfluss}(f)$ 
5       $f := f + g$ 

```

---

Die Prozedur  $\text{blockfluss}(f)$  berechnet einen blockierenden Fluss im Restnetzwerk  $N_f$ , der für alle Kanten den Wert 0 hat, die nicht auf einem kürzesten Pfad  $P$  von  $s$  nach  $t$  in  $N_f$  liegen. Hierzu werden aus  $N_f$

alle Knoten  $u \neq t$  entfernt, die einen Abstand  $d(s, u) \geq d(s, t)$  in  $N_f$  haben. Falls in  $N_f$  kein Pfad von  $s$  nach  $t$  existiert (d.h.  $d(s, t) = \infty$ ), wird auch  $t$  entfernt.

Das resultierende Netzwerk  $N'_f$  wird als **Schichtnetzwerk** bezeichnet, da jeder Knoten in  $N'_f$  einer Schicht  $S_j$  zugeordnet werden kann: Für  $j = 0, \dots, \max\{d(s, u) \mid d(s, u) < d(s, t)\}$  ist  $S_j = \{u \in V \mid d(s, u) = j\}$ . Im Fall  $d(s, t) < \infty$  kommt für  $j = d(s, t)$  noch die Schicht  $S_j = \{t\}$  hinzu. Zudem werden alle Kanten aus  $N_f$  entfernt, die nicht auf einem kürzesten Pfad von  $s$  zu einem Knoten in  $N'_f$  liegen, d.h. jede Kante  $(u, v)$  in  $N'_f$  verbindet einen Knoten  $u$  in Schicht  $S_j$  mit einem Knoten  $v$  in Schicht  $S_{j+1}$  von  $N'_f$ .

Das Schichtnetzwerk  $N'_f$  wird von der Prozedur **schichtnetzwerk** durch eine modifizierte Breitensuche in Zeit  $O(n + m)$  berechnet. Diese Prozedur gibt den Wert **true** zurück, falls  $t$  im berechneten Schichtnetzwerk  $N'_f$  enthalten (und somit der aktuelle Fluss  $f$  noch nicht maximal) ist, und sonst den Wert **false**.

**Satz 53.** Der Algorithmus von Dinic durchläuft die while-Schleife höchstens  $n$ -mal.

*Beweis.* Sei  $k$  die Anzahl der Schleifendurchläufe und für  $i = 1, \dots, k$  sei  $g_i$  der blockierende Fluss, den der Dinic-Algorithmus im Schichtnetzwerk  $N'_{f_{i-1}}$  berechnet, d.h.  $f_i = f_{i-1} + g_i$ . Zudem sei  $d_i(u, v)$  wieder die minimale Länge eines Pfades von  $u$  nach  $v$  im Restnetzwerk  $N'_{f_{i-1}}$ . Wir zeigen, dass  $d_{i+1}(s, t) > d_i(s, t)$  ist. Da  $d_1(s, t) \geq 1$  und  $d_k(s, t) \leq n - 1$  ist, folgt  $k \leq n - 1$ .

**Behauptung 54.** Für jeden Knoten  $u \in V$  gilt  $d_{i+1}(s, u) \geq d_i(s, u)$ .

Hierzu zeigen wir folgende Behauptung.

**Behauptung 55.** Falls die Kante  $e = (u_j, u_{j+1})$  auf einem kürzesten Pfad  $P = (u_0, \dots, u_h)$  von  $s = u_0$  nach  $u = u_h$  in  $N_{f_i}$  liegt (d.h.  $d_{i+1}(s, u_{j+1}) = d_{i+1}(s, u_j) + 1$ ), dann gilt  $d_i(s, u_{j+1}) \leq d_i(s, u_j) + 1$ .

Die Behauptung ist klar, wenn die Kante  $e = (u_j, u_{j+1})$  auch in  $N_{f_{i-1}}$  enthalten ist. Ist dies nicht der Fall, muss  $f_{i-1}(e) \neq f_i(e)$  sein, d.h.  $g_i(e)$  muss ungleich 0 sein. Da  $e$  nicht in  $N_{f_{i-1}}$  und somit auch nicht in  $N'_{f_{i-1}}$  ist, muss  $e^R = (u_{j+1}, u_j)$  in  $N'_{f_{i-1}}$  sein. Da  $N'_{f_{i-1}}$  nur Kanten auf kürzesten Pfaden von  $s$  zu einem Knoten in  $N'_{f_{i-1}}$  enthält, folgt  $d_i(s, u_j) = d_i(s, u_{j+1}) + 1$ , was  $d_i(s, u_{j+1}) = d_i(s, u_j) - 1 \leq d_i(s, u_j) + 1$  impliziert.

Damit ist Behauptung 55 bewiesen und Behauptung 54 folgt wie im Beweis von Satz 47. Als nächstes zeigen wir folgende Behauptung.

**Behauptung 56.** Für  $i = 1, \dots, k - 1$  gilt  $d_{i+1}(s, t) > d_i(s, t)$ .

Sei  $P = (u_0, u_1, \dots, u_h)$  ein kürzester Pfad von  $s = u_0$  nach  $t = u_h$  in  $N_{f_i}$ . Dann gilt wegen Behauptung 54, dass  $d_i(s, u_j) \leq d_{i+1}(s, u_j) = j$  für  $j = 0, \dots, h$  ist.

Wir betrachten zwei Fälle. Wenn alle Knoten  $u_j$  in  $N'_{f_{i-1}}$  enthalten sind, führen wir die Annahme  $d_i(s, t) = d_{i+1}(s, t)$  auf einen Widerspruch. Wegen Behauptung 55 folgt aus dieser Annahme nämlich die Gleichheit  $d_i(s, u_{j+1}) = d_i(s, u_j) + 1$ , da sonst  $d_i(s, t) < h$  wäre. Folglich ist  $P$  auch ein kürzester Pfad von  $s$  nach  $t$  in  $N'_{f_{i-1}}$  und somit  $g_i$  kein blockierender Fluss in  $N'_{f_{i-1}}$ .

Es bleibt der Fall, dass mindestens ein Knoten  $u_j$  nicht in  $N'_{f_{i-1}}$  enthalten ist. Sei  $u_{j+1}$  der erste Knoten auf  $P$ , der nicht in  $N'_{f_{i-1}}$  enthalten ist. Dann ist  $u_{j+1} \neq t$  und daher  $d_{i+1}(s, t) > d_{i+1}(s, u_{j+1})$ . Zudem liegt die Kante  $e = (u_j, u_{j+1})$  nicht nur in  $N_{f_i}$ , sondern wegen  $f_i(e) = f_{i-1}(e)$  (da weder  $e$  noch  $e^R$  zu  $N'_{f_{i-1}}$  gehören) auch in  $N'_{f_{i-1}}$ . Da somit  $u_j$  in  $N'_{f_{i-1}}$  und  $e$  in  $N_{f_i}$  ist, kann  $u_{j+1}$  nur aus dem Grund nicht zu  $N'_{f_{i-1}}$  gehören, dass  $d_i(s, u_{j+1}) = d_i(s, t)$  ist. Daher folgt wegen  $d_{i+1}(s, u_j) \geq d_i(s, u_j)$  (Behauptung 54) und  $d_i(s, u_j) + 1 \geq d_i(s, u_{j+1})$  (Behauptung 55)

$$d_{i+1}(s, t) > d_{i+1}(s, u_{j+1}) = d_{i+1}(s, u_j) + 1 \geq d_i(s, u_{j+1}) = d_i(s, t).$$

■

Die Prozedur **schichtnetzwerk** führt eine Breitensuche mit Startknoten  $s$  im Restnetzwerk  $N_f$  aus und speichert dabei in der Menge  $E'$  nicht nur alle Baumkanten, sondern zusätzlich alle Querkanten  $(u, v)$ , die auf einem kürzesten Weg von  $s$  zu  $v$  liegen. Sobald alle von  $s$  aus erreichbaren Knoten besucht (und in  $V'$  gespeichert) wurden oder  $t$  am Kopf der Warteschlange  $Q$  erscheint, bricht die Suche ab. Falls der Kopf von  $Q$  gleich  $t$  ist, werden alle Knoten  $v \neq t$ , die die gleiche Entfernung von  $s$  wie  $t$  haben, sowie alle Kanten, die in diesen Knoten enden, wieder aus  $N'_f$  entfernt.

Die Laufzeitschranke  $O(n+m)$  folgt aus der Tatsache, dass jede Kante in  $E \cup E^R$  höchstens einmal besucht wird und jeder Besuch mit einem konstantem Zeitaufwand verbunden ist.

#### Prozedur **schichtnetzwerk**( $f$ )

---

```

1  for all  $v \in V$ ,  $e \in E \cup E^R$  do
2     $\text{niv}(v) := n$ 
3     $\text{vis}(e) := \text{false}$ 
4     $\text{niv}(s) := 0$ 
5     $V' := \{s\}$ 
6     $E' := \emptyset$ 
7    QueueInit( $Q$ )
8    Enqueue( $Q, s$ )
9    while  $\neg \text{QueueEmpty}(Q) \wedge \text{Head}(Q) \neq t$  do
10       $u := \text{Head}(Q)$ 
11      if  $\exists e = uv \in E \cup E^R : \text{vis}(e) = \text{false}$  then
12         $\text{vis}(e) := \text{true}$ 
13        if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{niv}(v) > \text{niv}(u)$  then
14           $V' := V' \cup \{v\}$ 
15           $E' := E' \cup \{e\}$ 
16           $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
17           $\text{niv}(v) := \text{niv}(u) + 1$ 
18          Enqueue( $Q, v$ )
19      else Dequeue( $Q$ )

```

---

```

20  if  $\text{Head}(Q) = t$  then
21     $V'' := \{v \in V' \mid v \neq t, \text{niv}(v) = \text{niv}(t)\}$ 
22     $V' := V' \setminus V''$ 
23     $E' := E' \setminus (V' \times V'')$ 
24    return true
25  else
26    return false

```

---

Die Prozedur **blockfluss1** berechnet einen blockierenden Fluss  $g$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$  in der Zeit  $O(nm)$ . Hierzu bestimmt sie in der repeat-Schleife mittels Tiefensuche einen Zunahmepfad  $P$  in  $N'_{f+g}$ , addiert den Fluss  $(f+g)_P$  zum aktuellen Fluss  $g$  hinzu, und entfernt die gesättigten Kanten  $e \in P$  aus  $E'$ . Falls die Tiefensuche in einer Sackgasse endet (weil  $E'$  keine weiterführenden Kanten enthält), wird die zuletzt besuchte Kante  $(u', u)$  ebenfalls aus  $E'$  entfernt und die Tiefensuche vom Startpunkt  $u'$  dieser Kante fortgesetzt (back tracking). Die Prozedur **blockfluss1** bricht ab, falls keine weiteren Pfade von  $s$  nach  $t$  existieren. Folglich ist der berechnete Fluss  $g$  tatsächlich blockierend.

Die Laufzeitschranke  $O(nm)$  folgt aus der Tatsache, dass sich die Anzahl der aus  $E'$  entfernten Kanten nach spätestens  $n$  Schleifen-durchläufen um 1 erhöht.

#### Prozedur **blockfluss1**( $f$ )

---

```

1  for all  $e \in V \times V$  do  $g(e) := 0$ 
2  StackInit( $S$ )
3  Push( $S, s$ )
4   $u := s$ 
5   $\text{done} := \text{false}$ 
6  repeat
7    if  $\exists e = uv \in E'$  then
8      Push( $S, v$ )
9       $c''(e) := c'(e) - g(e)$ 

```

```

10       $u := v$ 
11      elsif  $u = t$  then
12           $P := S\text{-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
13           $c'_g(P) := \min\{c''(e) \mid e \in P\}$ 
14          for all  $e \in P$  do
15              if  $g(e) = c'_g(P)$  then  $E' := E' \setminus \{e\}$ 
16               $g(e) := g(e) + c'_g(P)$ 
17               $g(e^R) := g(e^R) - c'_g(P)$ 
18           $u := s$ 
19          StackInit( $S$ )
20          Push( $S, s$ )
21      elsif  $u \neq s$  then
22          Pop( $S$ )
23           $u' := \text{Top}(S)$ 
24           $E' := E' \setminus \{(u', u)\}$ 
25           $u := u'$ 
26      else done := true
27      until done
28      return  $g$ 

```

---

Die Prozedur **blockfluss2** benötigt nur Zeit  $O(n^2)$ , um einen blockierenden Fluss  $g$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$  zu berechnen. Zu ihrer Beschreibung benötigen wir folgende Notation.

**Definition 57.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $u$  ein Knoten in  $N$ . Die **Ausgangskapazität** von  $u$  ist

$$c^+(u) = \sum_{(u,v) \in E} c(u, v)$$

und die **Eingangskapazität** von  $u$  ist

$$c^-(u) = \sum_{(v,u) \in E} c(v, u).$$

Der **Durchsatz** von  $u$  ist

$$d(u) = \begin{cases} c^+(u), & u = s, \\ c^-(u), & u = t, \\ \min\{c^+(u), c^-(u)\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Fluss  $g$  in  $N$  **sättigt** einen Knoten  $u \in V$ , falls  $d(u) = \max\{f^+(u), f^-(u)\}$  ist.

Die Korrektheit der Prozedur **blockfluss2** basiert auf folgender Proposition.

**Proposition 58.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $g$  ein Fluss in  $N$ .  $g$  ist blockierend, falls jeder  $s$ - $t$ -Pfad in  $N$  mindestens einen Knoten enthält, der durch  $g$  gesättigt wird.

*Beweis.* Dies folgt aus der Tatsache, dass ein Fluss  $g$  in  $N$ , der auf jedem  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  mindestens einen Knoten  $u$  sättigt, auch mindestens eine Kante in  $P$  sättigt. ■

Beginnend mit dem trivialen Fluss  $g = 0$  berechnet die Prozedur **blockfluss2** für jeden Knoten  $u$  den Durchsatz  $D(u)$  im Schichtnetzwerk  $N'_f$  und wählt in jedem Durchlauf der repeat-Schleife einen Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz  $D(u)$ , um den aktuellen Fluss  $g$  um den Wert  $D(u)$  zu erhöhen. Hierzu benutzt sie die Prozeduren **propagierevor** und **propagiererück**, die dafür Sorge tragen, dass der zusätzliche Fluss tatsächlich durch den Knoten  $u$  fließt und die Durchsatzwerte  $D(v)$  von allen Knoten aktualisiert werden, die von der Flusserhöhung betroffen sind. Aus diesem Grund wird  $u$  durch den zusätzlichen Fluss gesättigt und kann aus dem Netzwerk entfernt werden.

In der Menge  $B$  werden alle Knoten gespeichert, deren Durchsatz durch die Erhöhungen des Flusses  $g$  oder durch die Entfernung von

Kanten aus  $E'$  auf 0 gesunken ist. Diese Knoten und die mit ihnen verbundenen Kanten werden in der while-Schleife der Prozedur **blockfluss2** aus dem Schichtnetzwerk  $N'_f$  entfernt.

---

**Prozedur** **blockfluss2**( $f$ )

---

```

1  for all  $e \in V \times V$  do  $g(e) := 0$ 
2  for all  $u \in V'$  do
3     $D^+(u) := \sum_{uv \in E'} c'(u, v)$ 
4     $D^-(u) := \sum_{vu \in E'} c'(v, u)$ 
5  repeat
6    for all  $u \in V' \setminus \{s, t\}$  do
7       $D(u) := \min\{D^-(u), D^+(u)\}$ 
8       $D(s) := D^+(s)$ 
9       $D(t) := D^-(t)$ 
10     wähle  $u \in V'$  mit  $D(u)$  minimal
11     Init( $B$ ); Insert( $B, u$ )
12     propagierevor( $u$ )
13     propagiererück( $u$ )
14     while  $u := \text{Remove}(B) \notin \{s, t\}$  do
15        $V' := V' \setminus \{u\}$ 
16       for all  $e = uv \in E'$  do
17          $D^-(v) := D^-(v) - c'(u, v)$ 
18         if  $D^-(v) = 0$  then Insert( $B, v$ )
19          $E' := E' \setminus \{e\}$ 
20       for all  $e = vu \in E'$  do
21          $D^+(v) := D^+(v) - c'(v, u)$ 
22         if  $D^+(v) = 0$  then Insert( $B, v$ )
23          $E' := E' \setminus \{e\}$ 
24     until  $u \in \{s, t\}$ 
25   return  $g$ 
```

---

Da in jedem Durchlauf der repeat-Schleife mindestens ein Knoten  $u$  gesättigt und aus  $V'$  entfernt wird, wird nach höchstens  $n - 1$  Itera-

tionen einer der beiden Knoten  $s$  oder  $t$  als Knoten  $u$  mit minimalem Durchsatz  $D(u)$  gewählt und die repeat-Schleife verlassen. Da nach Beendigung des letzten Durchlaufs der Durchsatz von  $s$  oder von  $t$  gleich 0 ist, wird einer dieser beiden Knoten zu diesem Zeitpunkt von  $g$  gesättigt. Nach Proposition 58 ist somit  $g$  ein blockierender Fluss.

Die Prozeduren **propagierevor** und **propagiererück** propagieren den Fluss durch  $u$  in Vorwärtsrichtung hin zu  $t$  bzw. in Rückwärtsrichtung hin zu  $s$ . Dies geschieht in Form einer Breitensuche mit Startknoten  $u$  unter Benutzung der Kanten in  $E'$  bzw.  $E'^R$ . Da der Durchsatz  $D(u)$  von  $u$  unter allen Knoten minimal ist, ist sichergestellt, dass der Durchsatz  $D(v)$  jedes Knoten  $v$  ausreicht, um den für ihn ermittelten Zusatzfluss in Höhe von  $z(v)$  weiterzuleiten.

---

**Prozedur** **propagierevor**( $u$ )

---

```

1  for all  $v \in V'$  do  $z(v) := 0$ 
2   $z(u) := D(u)$ 
3  QueueInit( $Q$ ); Enqueue( $Q, u$ )
4  while  $v := \text{Dequeue}(Q) \neq \perp$  do
5    while  $z(v) \neq 0 \wedge \exists e = vu \in E'$  do
6       $m := \min\{z(v), c'(e)\}$ 
7       $z(v) := z(v) - m$ ;  $z(u) := z(u) + m$ 
8      aktualisierekante( $e, m$ )
9      Enqueue( $Q, u$ )
```

---



---

**Prozedur** **aktualisierekante**( $e = vu, m$ )

---

```

1   $g(e) := g(e) + m$ 
2   $c'(e) := c'(e) - m$ 
3  if  $c'(e) = 0$  then  $E' := E' \setminus \{e\}$ 
4   $D^+(v) := D^+(v) - m$ 
5  if  $D^+(v) = 0$  then Insert( $B, v$ )
6   $D^-(u) := D^-(u) - m$ 
7  if  $D^-(u) = 0$  then Insert( $B, u$ )
```

---

Die Prozedur **propagiererück** unterscheidet sich von der Prozedur **propagierevor** nur dadurch, dass in Zeile 5 die Bedingung  $\exists e = vu \in E'$  durch die Bedingung  $\exists e = uv \in E'$  ersetzt wird.

Da die repeat-Schleife von **blockfluss2** maximal  $(n - 1)$ -mal durchlaufen wird, werden die Prozeduren **propagierevor** und **propagiererück** höchstens  $(n - 1)$ -mal aufgerufen. Sei  $a$  die Gesamtzahl der Durchläufe der inneren while-Schleife von **propagierevor**, summiert über alle Aufrufe. Da in jedem Durchlauf eine Kante aus  $E'$  entfernt wird (falls  $m = c'(u, v)$  ist) oder der zu propagierende Fluss  $z(v)$  durch einen Knoten  $v$  auf 0 sinkt (falls  $m = z(v)$  ist), was pro Knoten und pro Aufruf höchstens einmal vorkommt, ist  $a \leq n^2 + m$ . Der gesamte Zeitaufwand ist daher  $O(n^2 + m)$  innerhalb der beiden while-Schleifen und  $O(n^2)$  außerhalb. Die gleichen Schranken gelten für **propagiererück**.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die while-Schleife von **blockfluss2** einen Gesamtaufwand von  $O(n + m)$  hat. Folglich ist die Laufzeit von **blockfluss2**  $O(n^2)$ .

**Korollar 59.** *Der Algorithmus von Dinic berechnet bei Verwendung der Prozedur **blockfluss2** einen maximalen Fluss in Zeit  $O(n^3)$ .*

Auf Netzwerken, deren Flüsse durch jede Kante oder durch jeden Knoten durch eine relativ kleine Zahl  $C$  beschränkt sind, lassen sich noch bessere Laufzeitschranken für den Dinic-Algorithmus nachweisen.

**Satz 60.** *Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.*

- (i) *Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $d(u) \leq C$  hat, so durchläuft der Algorithmus von Dinic die while-Schleife höchstens  $(2(Cn)^{1/2} + 1)$ -mal.*
- (ii) *Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so durchläuft der Algorithmus von Dinic die while-Schleife höchstens  $(2^5 Cn^2)^{1/3}$ -mal.*

*Beweis.* Sei  $M = |f|$  die Größe eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$ .

(i) Da die Anzahl  $a$  der Schleifendurchläufe durch  $M$  beschränkt ist, können wir  $M > (Cn)^{1/2}$  annehmen. Betrachte den  $i$ -ten Schleifendurchlauf, in dem ein blockierender Fluss  $g_i$  im Schichtnetzwerk  $N'_{f_{i-1}}$  mit den Schichten  $S_0 = \{s\}, S_1, \dots, S_{d_i-1}, S_{d_i} = \{t\}$  berechnet wird. Da ein maximaler Fluss in  $N'_{f_{i-1}}$  (in  $N'_{f_{i-1}}$  kann er wieder kleiner sein) die Größe  $r_i = M - |f_{i-1}|$  hat und dieser durch die Knoten jeder einzelnen Schicht  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq d_i - 1$ , fließt, muss

$$r_i \leq C\|S_j\| \text{ bzw. } r_i/C \leq \|S_j\|,$$

sein, woraus

$$(d_i - 1)r_i/C \leq \|S_1\| + \dots + \|S_{d_i-1}\| \leq n - 2 \leq n \text{ bzw. } d_i \leq 1 + nC/r_i$$

folgt. Damit ist die Anzahl  $a$  der Schleifendurchläufe durch

$$a \leq i + r_{i+1} \leq d_i + r_{i+1} \leq r_{i+1} + 1 + nC/r_i$$

beschränkt. Nun wählen wir  $i$  so, dass  $r_i > (Cn)^{1/2}$  und  $r_{i+1} \leq (Cn)^{1/2}$  ist. Dann folgt

$$a - 1 \leq r_{i+1} + nC/r_i \leq (Cn)^{1/2} + nC/(Cn)^{1/2} = 2(Cn)^{1/2}.$$

(ii) Da die Anzahl  $a$  der Schleifendurchläufe durch  $M$  beschränkt ist, können wir  $M > (2n\sqrt{C})^{2/3}$  annehmen. Betrachte den  $i$ -ten Schleifendurchlauf, in dem ein blockierender Fluss  $g_i$  im Schichtnetzwerk  $N'_{f_{i-1}}$  mit den Schichten  $S_0 = \{s\}, S_1, \dots, S_{d_i-1}, S_{d_i}$  berechnet wird. Hierbei nehmen wir zu  $S_{d_i}$  alle Knoten hinzu, die nicht in  $N'_{f_{i-1}}$  liegen. Sei  $k_j$  die Anzahl der Kanten von  $S_j$  nach  $S_{j+1}$ . Da ein maximaler Fluss in  $N'_{f_{i-1}}$  (in  $N'_{f_{i-1}}$  kann er wieder kleiner sein) die Größe  $r_i = M - |f_{i-1}|$  hat und dieser für  $j = 0, \dots, d_i - 1$  durch die  $k_j$  Kanten von  $S_j$  nach  $S_{j+1}$  fließt, muss

$$r_i \leq Ck_j \leq C\|S_j\|\|S_{j+1}\| \text{ bzw. } r_i/C \leq \|S_j\|\|S_{j+1}\|$$

sein. Somit enthält mindestens eine von zwei benachbarten Schichten  $S_j$  und  $S_{j+1}$  mindestens  $\sqrt{r_i/C}$  Knoten, woraus

$$(d_i/2)\sqrt{r_i/C} \leq \|S_0\| + \dots + \|S_{d_i}\| \leq n \text{ bzw. } d_i \leq 2n\sqrt{C/r_i}$$

folgt. Damit ist die Anzahl  $a$  der Schleifendurchläufe durch

$$a \leq i + r_{i+1} \leq d_i + r_{i+1} \leq r_{i+1} + 2n\sqrt{C/r_i}$$

beschränkt. Nun wählen wir  $i$  so, dass  $r_i > (2n\sqrt{C})^{2/3}$  und  $r_{i+1} \leq (2n\sqrt{C})^{2/3}$  ist. Dann folgt

$$a \leq (2n\sqrt{C})^{2/3} + 2n\sqrt{C}/(2n\sqrt{C})^{1/3} = (2^5 C n^2)^{1/3}.$$

■

**Korollar 61.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk.

- (i) Falls jeder Knoten  $u \in V \setminus \{s, t\}$  einen Durchsatz  $d(u) \leq C$  hat, so berechnet der Algorithmus von Dinic bei Verwendung der Prozedur **blockfluss1** einen maximalen Fluss in Zeit  $O((nC + m)\sqrt{C}n)$ .
- (ii) Falls jede Kante  $e \in E$  eine Kapazität  $c(e) \leq C$  hat, so berechnet der Algorithmus von Dinic bei Verwendung der Prozedur **blockfluss1** einen maximalen Fluss in Zeit  $O(C^{4/3}n^{2/3}m)$ .

*Beweis.* Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Kapazitätschranke auf den Kanten oder Knoten auch für jedes Schichtnetzwerk  $N'_{f_i}$  gilt.

- (i) Jedesmal wenn **blockfluss1** einen  $s-t$ -Pfad  $P$  im Schichtnetzwerk findet, verringert sich der Durchsatz  $c''(u)$  der auf  $P$  liegenden Knoten  $u$  um den Wert  $c'_g(P) \geq 1$ , da der Fluss  $g$  durch diese Knoten um diesen Wert steigt. Daher kann jeder Knoten an maximal  $C$  Flusserhöhungen beteiligt sein, bevor sein Durchsatz auf 0 sinkt. Da somit pro Knoten ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchsschritte, die zu einem  $s-t$ -Pfad führen, und zusätzlich pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchsschritte anfällt, läuft **blockfluss1** in Zeit  $O(nC + m)$ .

(ii) Jedesmal wenn **blockfluss1** einen  $s-t$ -Pfad  $P$  im Schichtnetzwerk findet, verringert sich die Kapazität  $c''(e)$  der auf  $P$  liegenden Kanten  $e$  um den Wert  $c'_g(P) \geq 1$ . Da somit pro Kante ein Zeitaufwand von  $O(C)$  für alle erfolgreichen Tiefensuchsschritte und  $O(1)$  für alle nicht erfolgreichen Tiefensuchsschritte anfällt, läuft **blockfluss1** in Zeit  $O(Cm + m) = O(Cm)$ . ■

Durch eine einfache Reduktion des bipartiten Matchingproblems auf ein Flussproblem erhält man folgendes Resultat (siehe Übungen).

**Korollar 62.** In einem bipartiten Graphen lässt sich ein maximales Matching in Zeit  $O(\sqrt{\mu(G)}m)$  bestimmen.

## 4.4 Kostenoptimale Flüsse

In manchen Anwendungen fallen für die Benutzung jeder Kante  $e$  eines Netzwerkes Kosten an, die proportional zur Höhe des Flusses  $f(e)$  durch diese Kante sind. Falls die Kosten für die einzelnen Kanten differieren, ist es möglich, dass zwei Flüsse unterschiedliche Kosten verursachen, obwohl sie die gleiche Größe haben. Man möchte also einen maximalen Fluss  $f$  berechnen, der minimale Kosten hat.

Die Kosten eines Flusses  $f$  werden auf der Basis einer **Kostenfunktion**  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$  berechnet, wobei für jede Kante  $e \in E$  mit  $f(e) \geq 0$  Kosten in Höhe von  $f(e)k(e)$  anfallen.

Die Gesamtkosten von  $f$  im Netzwerk berechnen sich also zu

$$k(f) = \sum_{f(e)>0} f(e)k(e).$$

Ein negativer Kostenwert  $k(e) < 0$  bedeutet, dass eine Erhöhung des Flusses durch die Kante  $e$  um 1 mit einem Gewinn in Höhe von  $-k(e)$

---

\*Natürlich kann man diese Einschränkung bspw. dadurch umgehen, dass man die Kante  $e = (u, v)$  durch einen Pfad  $(u, w, v)$  über einen neuen Knoten  $w$  ersetzt.

verbunden ist. Ist zu einer Kante  $e \in E$  auch die gegenläufige Kante  $e^R$  in  $E$  enthalten, so muss  $k$  die Bedingung  $k(e^R) = -k(e)$  erfüllen.\* Der Grund hierfür ist, dass die Erniedrigung von  $f(e) > 0$  um einen bestimmten Wert  $w \leq f(e)$  gleichbedeutend mit einer Erhöhung von  $f(e^R)$  um diesen Wert im Restnetzwerk  $N_f$  ist und die Kostenfunktion auch für  $N_f$  gelten soll. Daher können wir  $k$  mittels  $k(e) = -k(e^R)$ , falls  $e^R \in E$  und  $k(e) = 0$  für alle  $e \in (V \times V) \setminus (E \cup E^R)$  auf die Menge  $V \times V$  erweitern. Zudem definieren wir für beliebige Multimengen  $F \subseteq V \times V$  die Kosten von  $F$  als  $k(F) = \sum_{e \in F} k(e)$  (d.h. jede Kante  $e \in F$  wird bei der Berechnung von  $k(F)$  entsprechend der Häufigkeit ihres Vorkommens in  $F$  berücksichtigt). Wir nennen  $F$  **negativ**, falls  $F$  negative Kosten  $k(F) < 0$  hat.

Das nächste Lemma liefert einen Algorithmus, mit dem sich überprüfen lässt, ob ein Fluss minimale Kosten unter allen Flüssen derselben Größe hat. Für einen Fluss  $f$  sei

$$k_{\min}(f) = \min\{k(g) \mid g \text{ ist ein Fluss in } N \text{ mit } |g| = |f|\}$$

das Minimum der Kosten aller Flüsse der Größe  $|f|$ .

**Lemma 63.** Ein Fluss  $f$  in  $N$  hat genau dann minimale Kosten  $k(f) = k_{\min}(f)$ , wenn es im Restnetzwerk  $N_f$  keinen negativen Kreis  $K$  mit  $k(K) < 0$  gibt.

*Beweis.* Falls es in  $N_f$  einen Kreis  $K$  mit Kosten  $k(K) < 0$  gibt, dann können wir den Fluss durch alle Kanten  $e \in K$  um 1 erhöhen. Dies führt auf einen Fluss  $g$  mit  $|g| = |f|$  und  $k(g) = k(f) + k(K) < k(f)$ . Sei umgekehrt  $g$  ein Fluss in  $N$  mit  $|g| = |f|$  und  $k(g) < k(f)$ . Dann ist  $g - f$  wegen  $g(e) - f(e) \leq c(e) - f(e)$  ein Fluss in  $N_f$ . Da  $g - f$  die Größe  $|g - f| = 0$  hat, können wir  $g - f$  als Summe von Flüssen  $h_1, \dots, h_k$  in  $N_f$  darstellen, wobei  $h_i$  nur für Kanten  $e$  auf einem Kreis  $K_i$  in  $N_f$  einen positiven Wert  $h_i(e) = w_i > 0$  annimmt (siehe nächsten Abschnitt). Da  $k(h_1) + \dots + k(h_k) = k(g - f) = k(g) - k(f) < 0$  ist, muss wegen  $k(h_i) = \sum_{e \in K_i} h_i(e)k(e) = w_i k(K_i)$  mindestens ein Kreis  $K_i$  negativ sein.

Um  $h_i$  und die zugehörigen Kreise  $K_i$  für  $i = 1, \dots, k$  zu finden, wählen wir eine beliebige Kante  $e_{i,1}$  aus  $E_f$ , für die der Fluss  $h'_{i-1} = g - f - h_1 - \dots - h_{i-1}$  einen minimalen positiven Wert  $w = h'_{i-1}(e_{i,1}) > 0$  annimmt (falls es keine solche Kante  $e_{i,1}$  gibt, sind wir fertig, weil dann  $h'_{i-1}$  der triviale Fluss ist). Da  $h'_{i-1}$  den Wert 0 hat und somit die Kontinuitätsbedingung für alle Knoten (inklusive  $s$  und  $t$ ) erfüllt, lässt sich nun zu jeder Kante  $e_{i,j} = (a, b) \in E_f$  solange eine Fortsetzung  $e_{i,j+1} = (b, c) \in E_f$  mit  $h'_{i-1}(e_{i,j+1}) > 0$  (und damit  $h'_{i-1}(e_{i,j+1}) \geq w$ ) finden bis sich ein Kreis  $K_i$  schließt. Nun setzen wir  $h_i(e_{i,j}) = w_i$  für alle Kanten  $e_{i,j} \in K_i$ , wobei  $w_i = \min\{h'_{i-1}(e) \mid e \in K_i\}$  ist.

Da sich die Anzahl der Kanten in  $E_f$ , die unter dem verbleibenden Fluss  $h'_i = g - f - h_1 - \dots - h_i$  einen Wert ungleich 0 haben, gegenüber  $h'_{i-1}$  mindestens um 1 verringert, ist die Anzahl der Kreise  $K_i$  durch  $\|E_f\| \leq 2m$  beschränkt. ■

Mithilfe von Lemma 63 lässt sich ein maximaler Fluss mit minimalen Kosten wie folgt berechnen. Wir berechnen zuerst einen maximalen Fluss  $f$ . Dann suchen wir beginnend mit  $i = 1$  und  $f_0 = f$  einen negativen Kreis  $K_i$  in  $N_{f_{i-1}}$ . Hierzu kann der Bellman-Ford-Moore Algorithmus benutzt werden, wenn wir zu  $N_{f_{i-1}}$  einen neuen Knoten  $s'$  hinzufügen und diesen mit allen Knoten  $u$  durch eine neue Kante  $(s', u)$  verbinden.

Falls kein negativer Kreis existiert, ist  $f_{i-1}$  ein maximaler Fluss mit minimalen Kosten. Andernfalls bilden wir den Fluss  $f_i$ , indem wir zu  $f_{i-1}$  den Fluss  $f_{K_i}$  addieren, der auf jeder Kante  $e \in K_i$  den Wert  $f_{K_i}(e) = c_{f_{i-1}}(K_i) = \min\{c_{f_{i-1}}(e) \mid e \in K_i\}$  hat. Da sich die Kosten  $k(f_i) = k(f_{i-1}) + k(f_{K_i}) = k(f_{i-1}) + c_{f_{i-1}}(K_i)k(K_i)$  von  $f_i$  wegen  $k(K_i) \leq -1$  bei jeder Iteration um mindestens 1 verringern und die Kostendifferenz zwischen zwei beliebigen Flüssen durch  $D = \sum_{u \in V} |k(s, u)|(c(s, u) + c(u, s))$  beschränkt ist, liegt nach  $k \leq D$  Iterationen ein kostenminimaler Fluss  $f_k$  vor.

Der nächste Satz bereitet den Weg für einen Algorithmus zur Bestim-

mung eines kostenminimalen Flusses, dessen Laufzeit nicht von  $D$ , sondern von der Größe  $M = |f|$  eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$  abhängt. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass es in  $N$  keine negativen Kreise gibt.

**Lemma 64.** Ist  $f_{i-1}$  ein Fluss in  $N$  mit  $k(f_{i-1}) = k_{\min}(f_{i-1})$  und ist  $P_i$  ein Zunahmepfad in  $N_{f_{i-1}}$  mit

$$k(P_i) = \min\{k(P') \mid P' \text{ ist ein Zunahmepfad in } N_{f_{i-1}}\},$$

so ist  $f_i = f_{i-1} + f_{P_i}$  ein Fluss in  $N$  mit  $k(f_i) = k_{\min}(f_i)$ .

*Beweis.* Angenommen, es gibt einen Fluss  $g$  in  $N$  mit  $|g| = |f_i|$  und  $k(g) < k(f_i)$ . Dann gibt es in  $N_{f_i}$  einen negativen Kreis  $K$  mit  $k(K) < 0$ . Wir benutzen  $K$ , um einen Zunahmepfad  $P'$  mit  $k(f_{P'}) < k(f_{P_i})$  zu konstruieren.

Sei  $F$  die Multimenge aller Kanten, die auf  $K$  oder  $P_i$  liegen, d.h. jede Kante in  $K \Delta P_i = (K \setminus P_i) \cup (P_i \setminus K)$  kommt genau einmal und jede Kante in  $K \cap P_i$  kommt genau zweimal in  $F$  vor.  $F$  ist also ein Multigraph bestehend aus dem  $s-t$ -Pfad  $P_i$  und dem Kreis  $K$  und es gilt  $k(F) = k(P_i) + k(K) < k(P_i)$ .

Da jede Kante  $e \in \hat{F} = K \setminus E_{f_{i-1}}$  wegen  $f_{i-1}(e) = c(e)$  zwar von  $f_{i-1}$  aber wegen  $e \in K \subseteq E_{f_i}$  nicht von  $f_i$  gesättigt wird, muss  $f_{i-1}(e) \neq f_i(e)$  und somit  $e^R \in P_i$  sein, was  $\hat{F} \subseteq P_i^R$  impliziert. Somit ist jede Kante  $e \in \hat{F}$  und mit ihr auch  $e^R$  genau einmal in  $F$  enthalten. Entfernen wir nun für jede Kante  $e \in \hat{F}$  die beiden Kanten  $e$  und  $e^R$  aus  $F$ , so erhalten wir die Multimenge  $F' = F \setminus (\hat{F} \cup \hat{F}^R)$ , die wegen  $k(e) + k(e^R) = 0$  dieselben Kosten  $k(F') = k(F) < k(P_i)$  wie  $F$  hat.

Zudem gilt  $F' \subseteq E_{f_{i-1}}$ . Da  $F'$  aus  $F$  durch Entfernen von Kreisen (der Länge 2) entsteht, ist auch  $F'$  ein Multigraph, der sich in einen  $s-t$ -Pfad  $P'$  und eine gewisse Anzahl von Kreisen  $K_1, \dots, K_\ell$  in  $N_{f_{i-1}}$  zerlegen lässt. Da nach Voraussetzung keine negativen Kreise in  $N_{f_{i-1}}$

existieren, folgt

$$k(P') = k(F') - \sum_{i=1}^{\ell} k(K_i) \leq k(F') = k(F) < k(P_i).$$

■

Basierend auf Lemma 64 können wir nun leicht einen Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen Flusses mit minimalen Kosten in einem Netzwerk  $N$  angeben, falls es in  $N$  keine negativen Kreise gibt.

**Algorithmus Min-Cost-Flow**( $V, E, s, t, c, k$ )

---

```

1  for all  $(u, v) \in V \times V$  do
2       $f(u, v) := 0$ 
3  repeat
4       $P \leftarrow \text{min-zunahmepfad}(f)$ 
5      if  $P \neq \perp$  then add( $f, P$ )
6  until  $P = \perp$ 
```

---

Hierbei berechnet die Prozedur **min-zunahmepfad**( $f$ ) einen Zunahmepfad in  $N_f$ , der minimale Kosten unter allen Zunahmepfaden in  $N_f$  hat. Da es in  $N_f$  keine negativen Kreise gibt, kann hierzu bspw. der Bellman-Ford-Moore Algorithmus benutzt werden, der in Zeit  $O(mn)$  läuft. Dies führt auf eine Gesamlaufzeit von  $O(Mmn)$ , wobei  $M = |f|$  die Größe eines maximalen Flusses  $f$  in  $N$  ist.

**Satz 65.** In einem Netzwerk  $N$  kann ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten in Zeit  $O(|f|mn)$  bestimmt werden, falls es in  $N$  keine negativen Kreise bzgl. der Kostenfunktion  $k$  gibt.

Tatsächlich lässt sich für Netzwerke ohne negative Kreise die Laufzeit unter Verwendung des Dijkstra-Algorithmus in Kombination mit einer Preisfunktion auf  $O(Mm \log n)$  verbessern.

**Definition 66.** Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph mit Kostenfunktion  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$ . Eine Funktion  $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt **Preisfunktion** für  $(G, k)$ , falls für jede Kante  $e = (x, y)$  in  $E$  die Ungleichung

$$k(x, y) + p(x) - p(y) \geq 0$$

gilt. Die bzgl.  $p$  **reduzierte** Kostenfunktion  $k^p : E \rightarrow \mathbb{N}_0$  ist

$$k^p(x, y) = k(x, y) + p(x) - p(y).$$

**Lemma 67.** Ein Digraph  $G = (V, E)$  mit Kostenfunktion  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$  hat genau dann keine negativen Kreise, wenn es eine Preisfunktion  $p$  für  $(G, k)$  gibt. Zudem lässt sich eine geeignete Preisfunktion  $p$  in Zeit  $O(nm)$  finden.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Rückwärtsrichtung. Sei also  $p$  eine Preisfunktion mit  $k^p(e) \geq 0$  für alle  $e \in E$ . Dann gilt für jede Kantenmenge  $F \subseteq E$  die Ungleichung  $k^p(F) \geq 0$ . Da zudem für jeden Kreis  $K$  in  $G$  die Gleichheit  $k(K) = k^p(K)$  gilt, folgt sofort  $k(K) = k^p(K) \geq 0$ .

Sei nun  $G$  ein Digraph und sei  $k : E \rightarrow \mathbb{Z}$  eine Kostenfunktion ohne negativen Kreise. Betrachte den Digraphen  $G'$ , der aus  $G$  durch Hinzunahme eines neuen Knotens  $s$  und Kanten  $(s, x)$  für alle  $x \in V$  entsteht. Zudem erweitern wir  $k$  mittels  $k'(s, x) = 0$  zu einer Kostenfunktion  $k'$  auf  $G'$ . Da es auch in  $(G', k')$  keine negativen Kreise gibt, existiert in  $G'$  für jeden Knoten  $x \in V$  ein bzgl.  $k'$  kürzester Pfad von  $s$  nach  $x$ , dessen Länge wir mit  $d^{k'}(s, x)$  bezeichnen. Da nun für jede Kante  $e = (x, y) \in E$  die Ungleichung

$$d^{k'}(s, x) + k(x, y) \geq d^{k'}(s, y)$$

gilt, ist  $p(x) = d^{k'}(s, x)$  die gesuchte Preisfunktion. Diese lässt sich mit BFM in Zeit  $O(nm)$  finden. ■

Sobald wir eine Preisfunktion  $p$  für das Restnetzwerk  $N_f$  haben, können wir Dijkstra zur Berechnung eines bzgl.  $k^p$  kürzesten Zunahmepfades  $P$  in  $N_f$  benutzen.  $P$  ist dann auch ein kürzester Pfad bzgl.

$k$ , da für jeden  $s-t$ -Pfad  $P$  die Beziehung  $k^p(P) = k(P) + p(s) - p(t)$  gilt und  $p(s) - p(t)$  eine von  $P$  unabhängige Konstante ist.

Falls  $N$  keine negativen Kreise hat, können wir für  $N = N_{f_0}$  eine Preisfunktion  $p_0(x) = \min\{k(P) \mid P \text{ ist ein } s-x\text{-Pfad}\}$  mit dem BFM-Algorithmus in Zeit  $O(nm)$  berechnen. Angenommen, wir haben für ein  $i \geq 1$  einen Fluss  $f_{i-1}$  mit minimalen Kosten  $k(f_{i-1}) = k_{\min}(f_{i-1})$  und eine Preisfunktion  $p_{i-1}$  für  $(N_{f_{i-1}}, k)$ . Sofern in  $N_{f_{i-1}}$  ein Zunahmepfad existiert, können wir mit dem Dijkstra-Algorithmus in Zeit  $O(m \log n)$  einen bzgl.  $k^{p_{i-1}}$  kürzesten Zunahmepfad  $P_i$  berechnen und erhalten einen größeren Fluss  $f_i = f_{i-1} + f_{P_i}$  mit minimalen Kosten  $k(f_i) = k_{\min}(f_i)$ . Andernfalls ist  $f_{i-1}$  ein maximaler Fluss.

Es bleibt die Frage, wie wir im Fall, dass  $P_i$  existiert, eine Preisfunktion  $p_i$  für  $N_{f_i}$  finden können, ohne erneut BFM zu benutzen.

**Lemma 68.** Sei  $d_i(s, x)$  die minimale Pfadlänge von  $s$  nach  $x$  in  $N_{f_{i-1}}$  bzgl.  $k^{p_{i-1}}$ , wobei  $p_{i-1} : V \rightarrow \mathbb{Z}$  eine beliebige Funktion ist. Dann ist  $p_i(x) = p_{i-1}(x) + d_i(s, x)$  eine Preisfunktion für  $k$  in  $N_{f_{i-1}}$  und in  $N_{f_i}$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass  $p_i$  eine Preisfunktion für  $(N_{f_{i-1}}, k)$  ist. Für jede Kante  $e = (x, y) \in E_{f_{i-1}}$  gilt nämlich  $d_i(y) \leq d_i(x) + k^{p_{i-1}}(e)$  und  $k^{p_{i-1}}(e) = k(e) + p_{i-1}(x) - p_{i-1}(y)$ . Somit ist

$$\begin{aligned} k^{p_i}(e) &= k(e) + p_i(x) - p_i(y) \\ &= k(e) + p_{i-1}(x) + d_i(s, x) - p_{i-1}(y) - d_i(s, y) \\ &= k^{p_{i-1}}(e) + d_i(s, x) - d_i(s, y) \geq 0. \end{aligned}$$

Falls  $e$  auf  $P_i$  liegt, gilt sogar  $k^{p_i}(e) = 0$ , da  $P_i$  ein bzgl.  $k^{p_{i-1}}$  kürzester  $s-t$ -Pfad in  $N_{f_{i-1}}$  und daher  $d_i(s, y) = d_i(s, x) + k^{p_{i-1}}(e)$  ist.

Da zudem für jede Kante  $e$  in  $N_{f_i}$ , die nicht zu  $N_{f_{i-1}}$  gehört, die gespiegelte Kante  $e^R$  auf dem Pfad  $P_i$  liegt, folgt  $k^{p_i}(e^R) = 0$  und somit  $k^{p_i}(e) = k(e) + p_i(x) - p_i(y) = -k(e^R) - p_i(y) + p_i(x) = -k^{p_i}(e^R) = 0$ . Dies zeigt, dass  $p_i$  eine Preisfunktion für  $(N_{f_i}, k)$  ist. ■

**Satz 69.** In einem Netzwerk  $N$  kann ein maximaler Fluss  $f$  mit minimalen Kosten in Zeit  $O(mn + |f|m \log n)$  bestimmt werden, falls es in  $N$  keine negativen Kreise bzgl. der Kostenfunktion  $k$  gibt.

*Beweis.* Wir berechnen zuerst mit BFM in Zeit  $O(nm)$  eine Preisfunktion  $p_0$  für die Kostenfunktion  $k$  im Netzwerk  $N = N_{f_0}$ . Dann bestimmen wir in  $\leq |f|$  Iterationen eine Folge von kostenminimalen Flüssen  $f_i$ , indem wir mit dem Dijkstra-Algorithmus in Zeit  $O(m \log n)$  einen bzgl.  $k^{p_{i-1}}$  kürzesten Zunahmepfad  $P_i$  in  $N_{f_{i-1}}$  berechnen. Da hierbei bereits die Distanzen  $d_i(x)$  für alle Knoten  $x$  berechnet werden können, erfordert die Bestimmung von  $p_i$  in jeder Iteration nur  $O(n)$  Zeit. ■

Das gewichtete Matchingproblem in einem bipartiten Graphen  $G = (U, W, E)$  lässt sich wie folgt auf die Berechnung eines kostenminimalen maximalen Flusses in einem azyklischen Netzwerk  $N(G)$  reduzieren. Wir fügen zwei neue Knoten  $s$  und  $t$  hinzu und verbinden  $s$  mit allen Knoten  $u \in U$  durch eine neue Kante  $(s, u)$  sowie alle Knoten  $w \in W$  durch eine neue Kante  $(w, t)$  mit  $t$ . Alle Kanten in  $E$  werden von  $U$  nach  $W$  gerichtet und haben die vorgegebenen Kosten/Gewichte. Alle neuen Kanten  $e$  haben die Kosten  $k(e) = 0$  und alle Kanten  $e$  in  $N(G)$  haben die Kapazität  $c(e) = 1$ . Dann entspricht jedem Fluss  $f$  in  $N(G)$  genau ein Matching  $M$  von  $G$  mit  $M = \{\{u, w\} \in U \times W \mid f(u, w) = 1\}$  (und umgekehrt entspricht jedem Matching  $M$  genau ein Fluss  $f$  mit dieser Eigenschaft).

Da die maximale Flussgröße  $M$  in  $N(G)$  durch  $n/2$  beschränkt ist, erhalten wir einen  $O(mn \log n)$  Algorithmus für das gewichtete Matchingproblem in bipartiten Graphen. Da  $N(G)$  kreisfrei ist, können wir hierbei beliebige Kantengewichte zulassen.

**Korollar 70.** In einem bipartiten Graphen  $G = (V, E)$  lässt sich ein maximales Matching mit minimalen Kosten in Zeit  $O(\mu(G)m \log n)$  berechnen.

*Beweis.* Wir transformieren  $G$  in das zugehörige Netzwerk  $N = N(G)$ . Da  $N$  eine sehr spezielle Form hat, lässt sich eine Preisfunktion  $p_0$  für  $(N, k)$  in Linearzeit bestimmen. Dann berechnen wir in höchstens  $\mu(G)$  Iterationen, die jeweils Zeit  $O(m \log n)$  beanspruchen, einen kostenminimalen maximalen Fluss  $f$  in  $N$ . Aus diesem lässt sich ein Matching  $M_f$  in  $G$  gewinnen, das wegen  $\|M_f\| = |f|$  maximal und wegen  $k(M_f) = k(f)$  kostenminimal ist. Die beiden Transformationen von  $G$  in  $N$  und von  $f$  in  $M_f$  benötigen nur Linearzeit. ■

Tatsächlich leistet der Algorithmus von Korollar 70 noch mehr. Er berechnet für jede Zahl  $i$  mit  $1 \leq i \leq \mu(G)$  ein Matching  $M_i$  der Größe  $i$ , das minimale Kosten unter allen Matchings dieser Größe hat, und eine zu  $M_i$  kompatible Preisfunktion  $p_{i-1}$  (siehe Übungen). Dabei heißt eine Preisfunktion  $p$  **kompatibel** zu einem Matching  $M$  in  $G$ , falls die reduzierten Kosten von allen Kanten  $e = (u, w) \in U \times W$  mit  $\{u, w\} \in E$  einen nichtnegativen Wert  $k^p(e) \geq 0$  und alle Kanten  $e = (u, w) \in U \times W$  mit  $\{u, w\} \in M$  den Wert  $k^p(e) = 0$  haben.

## 5 Färben von Graphen

**Definition 71.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.
- b)  $G$  heißt  **$k$ -färbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- c) Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbar}\}.$$

**Beispiel 72.**

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph  $k$ -färbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste  $k \geq 3$  schwierig.

**$k$ -Färbarkeit ( $k$ -COLORING):**

**Gegeben:** Ein Graph  $G$ .

**Gefragt:** Ist  $G$   $k$ -färbar?

**Satz 73.**  $k$ -COLORING ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

**Lemma 74.**  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und sei  $c$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Da dann die Mengen  $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, \chi(G)$ , stabil

sind, folgt  $\|S_i\| \leq \alpha(G)$  und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  sei  $S$  eine stabile Menge in  $G$  mit  $\|S\| = \alpha(G)$ . Dann ist  $G - S$   $k$ -färbar für ein  $k \leq n - \|S\|$ . Da wir alle Knoten in  $S$  mit der Farbe  $k + 1$  färben können, folgt  $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ . ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

**Lemma 75.**  $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ .

*Beweis.* Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

**Lemma 76.**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

**Algorithmus greedy-color**

---

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F\}$ 

```

---

Da für die Farbe  $c(v_i)$  von  $v_i$  nur  $\|F_i\| \leq \Delta(G)$  Farben verboten sind, gilt  $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

**Satz 77** (Brooks 1941 (vereinfachter Beweis von Lovász, 1975)). Sei  $G$  ein Graph mit  $\Delta(G) \geq 3$ . Dann gilt  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  nur dann, wenn  $K_{\Delta(G)+1}$  ein Teilgraph von  $G$  ist.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 4$  gibt es genau 3 Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 3$ . Diese erfüllen die Behauptung.

Sein nun  $G$  ein Graph mit  $n > 4$  Knoten und Maximalgrad  $d = \Delta(G) \geq 3$ , der  $K_{d+1}$  nicht als Teilgraph enthält. Wir können annehmen, dass  $G$  zusammenhängend ist.

Falls es in  $G$  einen Knoten  $u$  mit  $\deg(u) < d$  gibt, dann ist  $G - u$  nach IV  $d$ -färbar und somit auch  $G$ .

Es bleibt der Fall, dass alle Knoten  $u$  den Grad  $d$  haben. Da  $G \neq K_{d+1}$  ist, folgt  $n \geq d + 2$ . Falls  $G$  einen Schnittknoten  $s$  hat, d.h. in  $G - s$  gibt es  $k \geq 2$  Komponenten  $G_1, \dots, G_k$ , folgt nach IV  $\chi(G_i) \leq d$  und somit auch  $\chi(G) \leq d$ .

**Behauptung 78.** *In  $G$  gibt es einen Knoten  $u$ , der zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit  $\{a, b\} \notin E$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist.*

Da  $G$  den  $K_{d+1}$  nicht als Teilgraph enthält, hat jeder Knoten  $u$  zwei Nachbarn  $v, w \in N(u)$  mit  $\{v, w\} \notin E$ . Falls  $G - v$  2-fach zusammenhängend ist, ist  $G - \{v, w\}$  zusammenhängend und die Behauptung folgt.

Falls  $G - v$  nicht 2-fach zusammenhängend ist, hat  $G - v$  mindestens zwei 2-fach-Zusammenhangskomponenten (Blöcke)  $B_1, \dots, B_\ell$  der Blockbaum  $T$  hat mindestens zwei Blätter  $B_i, B_j$ . Da  $\kappa(G) \geq 2$  ist, ist  $v$  in  $G$  zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt  $B$  von  $T$  benachbart, der kein Schnittknoten ist. Wählen wir für  $a$  und  $b$  zwei dieser Knoten, so ist  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend und somit die Behauptung bewiesen.

Sei also  $u$  ein Knoten, der zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit  $\{a, b\} \notin E$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist. Wir wenden auf den Graphen  $G - \{a, b\}$  eine Tiefensuche an mit Startknoten  $u_1 = u$ . Sei  $(u_1, \dots, u_{n-2})$  die Reihenfolge, in der die Knoten besucht werden. Nun lassen wir **greedy-color** mit der Reihenfolge  $(a, b, u_{n-2}, \dots, u_1)$  laufen.

**Behauptung 79.** **greedy-color** benutzt  $\leq d$  Farben.

Die Knoten  $a$  und  $b$  erhalten die Farbe  $c(a) = c(b) = 1$ . Jeder Knoten  $u_i$ ,  $i > 1$ , ist mit einem Knoten  $u_j$  mit  $j < i$  verbunden. Daher ist seine Farbe  $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$ . Da  $u = u_1$  bereits zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit derselben Farbe hat, folgt auch  $c(u) \leq d$ . ■

**Korollar 80.** *Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der alle Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \leq 3$  mit  $\chi(G)$  Farben färbt.*

## 5.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph  $G$  heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von  $G$  als Punkte und die Kanten von  $G$  als Verbindungslien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kemps „Beweis“. Übrig blieb der **5-Farben-Satz**. Der **4-Farben-Satz** wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

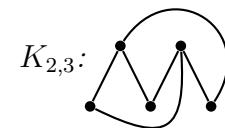
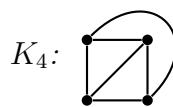
**Satz 81** (Appel, Haken 1976).

*Jeder planare Graph ist 4-färbar.*

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren  $\mathcal{O}(n^2)$  Algorithmus liefert, aber auch nicht ohne Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

**Beispiel 82.** Wie die folgenden Einbettungen von  $K_4$  und  $K_{2,3}$  in die Ebene zeigen, sind  $K_4$  und  $K_{2,3}$  planar.



△

Um eine Antwort auf die Frage zu finden, ob auch  $K_5$  und  $K_{3,3}$  planar sind, betrachten wir die Gebiete von in die Ebene eingebetteten Graphen.

Durch die Kanten eines eingebetteten Graphen wird die Ebene in so genannte **Gebiete** unterteilt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $r(G)$  oder kurz mit  $r$ . Der **Rand**  $\text{rand}(g)$  eines Gebiets  $g$  ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an  $g$  grenzen, wobei jede Kante so durchlaufen wird, dass  $g$  „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. bei Erreichen eines Knotens über eine Kante  $e$ ,  $u$  über die im Uhrzeigersinn nächste Kante  $e'$  wieder verlassen wird. Die Anzahl der an ein Gebiet  $g$  grenzenden Kanten bezeichnen wir mit  $d(g)$ , wobei Kanten, die nur an  $g$  und an kein anderes Gebiet grenzen, doppelt gezählt werden.

Die Gesamtzahl  $\sum_g d(g)$  aller Inzidenzen von Gebieten und Kanten bezeichnen wir mit  $i(G)$ . Da jede Kante genau 2 Inzidenzen zu dieser

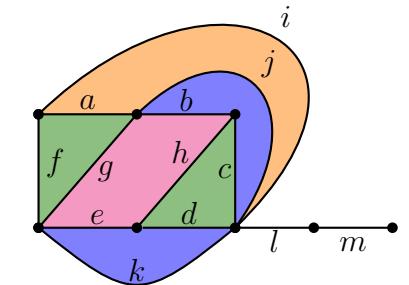
Summe beiträgt, folgt

$$\sum_g d(g) = i(G) = 2m(G).$$

Ein **ebener Graph** wird durch das Tripel  $G = (V, E, R)$  beschrieben, wobei  $R$  aus den Rändern aller Gebiete von  $G$  besteht. Wir nennen  $G$  auch **ebene Realisierung** des Graphen  $(V, E)$ . Durch  $R$  ist für jeden Knoten  $u$  die (zirkuläre) Ordnung  $\pi$  auf allen mit  $u$  inzidenten Kanten eindeutig festgelegt (und umgekehrt). Man nennt  $\pi$  das zu  $G$  gehörige **Rotationssystem**. Dieses kann bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung, ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden, indem man die zu  $u$  adjazenten Knoten gemäß  $\pi$  anordnet.

**Beispiel 83.** Nebenstehender ebener Graph hat 13 Kanten  $a, \dots, m$  und 7 Gebiete mit den Rändern

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$



Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\begin{aligned} \pi = & \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), \\ & (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sowohl in  $R$  als auch in  $\pi$  jede Kante genau zweimal vorkommt. □

**Satz 84** (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G = (V, E, R)$  gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

**Beweis.** Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl  $m(G) = m$ .

$m = 0$ : Da  $G$  zusammenhängend ist, muss dann  $n = 1$  sein.

Somit ist auch  $r = 1$ , also  $(*)$  erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$ : Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $m$  Kanten.

Ist  $G$  ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n - 1$  Knoten,  $m - 1$  Kanten und  $r$  Gebieten. Nach IV folgt  $(n - 1) - (m - 1) + r = 2$ , d.h.  $(*)$  ist erfüllt.

Falls  $G$  kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in  $G$  und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n$  Knoten,  $m - 1$  Kanten und  $r - 1$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$  und daher ist  $(*)$  auch in diesem Fall erfüllt. ■

**Korollar 85.** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Dann ist  $m \leq 3n - 6$ . Falls  $G$  dreiecksfrei ist gilt sogar  $m \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von  $G$ . Da  $n \geq 3$  ist, ist jedes Gebiet  $g$  von  $d(g) \geq 3$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$  bzw.  $r \leq 2m/3$ . Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was  $(1 - 2/3)m \leq n - 2$  und somit  $m \leq 3n - 6$  impliziert.

Wenn  $G$  dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von  $d(g) \geq 4$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$  bzw.  $r \leq m/2$ . Eulers Formel liefert daher  $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$ , was  $m/2 \leq n - 2$  und somit  $m \leq 2n - 4$  impliziert. ■

**Korollar 86.**  $K_5$  ist nicht planar.

**Beweis.** Wegen  $n = 5$ , also  $3n - 6 = 9$ , und wegen  $m = \binom{5}{2} = 10$  gilt  $m \not\leq 3n - 6$ . ■

**Korollar 87.**  $K_{3,3}$  ist nicht planar.

**Beweis.** Wegen  $n = 6$ , also  $2n - 4 = 8$ , und wegen  $m = 3 \cdot 3 = 9$  gilt  $m \not\leq 2n - 4$ . ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten  $v$  vom Grad  $\deg(v) \leq 5$  hat.

**Lemma 88.** Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad  $\delta(G) \leq 5$ .

**Beweis.** Für  $n \leq 6$  ist die Behauptung klar. Für  $n > 6$  impliziert die Annahme  $\delta(G) \geq 6$  die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  steht. ■

**Definition 89.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und seien  $u, v \in V$ . Dann entsteht der Graph  $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$  mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

durch **Fusion** von  $u$  und  $v$ . Ist  $e = \{u, v\}$  eine Kante von  $G$  (also  $e \in E$ ), so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Kontraktion** der Kante  $e$ .  $G$  heißt zu  $H$  **kontrahierbar**, falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch eine Folge von Kontraktionen gewonnen werden kann.

**Satz 90** (Kempe 1878, Heawood 1890).  
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

**Beweis.** Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ : Da  $G$  planar ist, existiert ein Knoten  $u$  mit  $\deg(u) \leq 5$ .

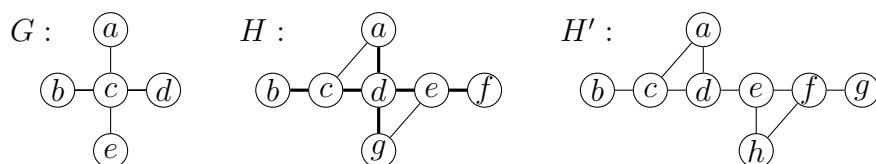
Zunächst entfernen wir  $u$  aus  $G$ . Falls  $u$  fünf Nachbarn hat, existieren zwei Nachbarn  $v$  und  $w$ , die nicht durch eine Kante verbunden sind, und wir fusionieren diese zu  $v$ .

Der resultierende Graph  $G'$  ist planar und hat  $n' \leq n - 1$  Knoten. Daher existiert nach IV eine 5-Färbung  $c'$  für  $G'$ . Da wir nun  $w$  mit  $c'(v)$  färben können und somit die Nachbarn von  $u$  höchstens 4 verschiedene Farben haben, ist  $G$  5-färbbar. ■

**Definition 91.** Seien  $G = (V, E)$  ein Graph,  $v \in V$  und  $e \in \binom{V}{2}$ .

- Durch Entfernen des Knotens  $v$  entsteht der Graph  $G[V - \{v\}]$  aus  $G$ , den wir mit  $\mathbf{G} - v$  bezeichnen.
- Den Graphen  $(V, E - \{e\})$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{G} - e$  und den Graphen  $(V, E \cup \{e\})$  mit  $\mathbf{G} \cup e$ .
- Hat  $v$  den Grad 2 und sind  $u$  und  $w$  die beiden Nachbarn von  $v$ , so entsteht der Graph  $G' = (G - v) \cup \{u, w\}$  durch **Überbrückung** von  $v$  aus  $G$ .
- $H$  heißt **Unterteilung** von  $G$ , wenn  $G$  durch sukzessive Überbrückungen aus einer isomorphen Kopie von  $H$  entsteht.

**Beispiel 92.** Betrachte folgende Graphen.



Offensichtlich ist  $H$  keine Unterteilung von  $G$ . Entfernen wir jedoch die beiden dünnen Kanten aus  $H$ , so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von  $G$ . Dagegen ist kein Teilgraph von  $H'$  eine Unterteilung von  $G$ . □

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph  $G$  eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  als Teilgraph enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

**Definition 93.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $K$  ein Kreis in  $G$ . Ein Teilgraph  $B$  von  $G$  heißt **Brücke** von  $K$  in  $G$ , falls

- $B$  nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von  $K$  verbindet, aber nicht auf  $K$  liegt, oder
- $B - K$  eine Zusammenhangskomponente von  $G - K$  ist und  $B$  aus  $B - K$  durch Hinzufügen aller Kanten zwischen  $B - K$  und  $K$  (und der zugehörigen Endpunkte auf  $K$ ) entsteht.

Die Knoten von  $B$ , die auf  $K$  liegen heißen **Kontaktpunkte** von  $B$ . Zwei Brücken  $B$  und  $B'$  von  $K$  heißen **inkompatibel**, falls

- $B$  Kontaktpunkte  $u, v$  und  $B'$  Kontaktpunkte  $u', v'$  hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge  $u, u', v, v'$  auf  $K$  liegen, oder
- $B$  und  $B'$  mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.

Es ist leicht zu sehen, dass ein Graph  $G$  genau dann planar ist, wenn sich die Brücken jedes Kreises  $K$  von  $G$  in höchstens zwei Mengen partitionieren lassen, so dass jede Menge nur kompatible Brücken enthält.

**Satz 94** (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $G$  ist planar.
- Keine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  ist ein Teilgraph von  $G$ .

**Beweis.** Wenn eine Unterteilung  $G'$  des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  ein Teilgraph von  $G$  ist, so ist  $G'$  und folglich auch  $G$  nicht planar.

Sei nun  $G = (V, E)$  nicht planar. Durch Entfernen von Knoten und Kanten erhalten wir einen 3-zusammenhängenden nicht planaren Teilgraphen  $G' = (V', E')$ , so dass  $G' - e'$  für jede Kante  $e' \in E'$  planar ist (siehe Übungen). Wir entfernen eine beliebige Kante  $e_0 = \{a_0, b_0\}$  aus  $G'$ . Da  $G' - e_0$  2-zusammenhängend ist, gibt es einen Kreis durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$  in  $G' - e_0$ . Sei  $H'$  eine ebene Realisierung von  $G' - e_0$  und sei  $K$  ein Kreis durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$ .

Dabei wählen wir  $H'$  und  $K$  so, dass es keine ebene Realisierung  $H''$  von  $G' - e_0$  gibt, in der ein Kreis durch  $a_0$  und  $b_0$  existiert, der in  $H''$  mehr Gebiete als  $K$  in  $H'$  einschließt.

Dann ist  $e_0$  eine Brücke von  $K$  in  $G'$ . Die übrigen Brücken von  $K$  in  $G'$  sind auch Brücken von  $K$  in  $H'$ . Die Kanten jeder solchen Brücke  $B$  verlaufen entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K$  in  $H'$ . Im ersten Fall nennen wir  $B$  eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**.

Für zwei Knoten  $a, b$  auf  $K$  bezeichnen wir mit  $K[a, b]$  die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von  $a$  nach  $b$  (im Uhrzeigersinn) auf  $K$  liegen. Zudem sei  $K[a, b] = K[a, b] \setminus \{b\}$ . Die Mengen  $K(a, b)$  und  $K(a, b]$  sind analog definiert.

**Behauptung 95.** *Jede äußere Brücke  $B$  besteht aus einer Kante, die einen Knoten in  $K(a_0, b_0)$  mit einem Knoten in  $K(b_0, a_0)$  verbindet.*

Zum Beweis der Behauptung nehmen wir an, dass  $B$  mindestens 3 Kontaktpunkte oder mindestens einen Kontaktpunkt in  $\{a_0, b_0\}$  hat. Dann liegen mindestens zwei dieser Punkte auf  $K[a_0, b_0]$  oder auf  $K[b_0, a_0]$ . Folglich kann  $K$  zu einem Kreis  $K'$  erweitert werden, der mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als  $K$ , was der Wahl von  $K$  und  $H'$  widerspricht.

Nun wählen wir eine innere Brücke  $B^*$ , die sowohl zu  $e_0$  als auch zu einer äußeren Brücke  $\hat{B}$  inkompaktibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit  $e_0$  inkompaktiblen inneren Brücken nach außen klappen und  $e_0$  als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Sei  $\hat{B} = \{a_1, b_1\}$ . Da  $e_0$  und  $\hat{B}$  inkompaktibel sind, können wir annehmen, dass diese vier Knoten in der Reihenfolge  $a_0, a_1, b_0, b_1$  auf  $K$  liegen. Wir zeigen nun, dass  $G'$  eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  als Teilgraph enthält. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen  $A, B \subseteq V'$  mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten  $a \in A$  und  $b \in B$  existieren. Oder

wir geben fünf Knoten an, zwischen denen 10 knotendisjunkte Pfade existieren.

**Fall 1:**  $B^*$  hat einen Kontaktpunkt  $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Aus Symmetriegründen können wir  $k_1 \in K(a_0, a_1)$  annehmen. Da  $B^*$  weder zu  $e_0$  noch zu  $\hat{B}$  kompatibel ist, hat  $B^*$  weitere Kontaktpunkte  $k_2 \in K(b_0, a_0)$  und  $k_3 \in K(a_1, b_1)$ , wobei  $k_2 = k_3$  sein kann.

**Fall 1a:**  $\exists k \in \{k_2, k_3\} \cap K(b_0, b_1)$ . In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, k\}$  und  $\{b_0, b_1, k_1\}$ .

**Fall 1b:**  $\{k_2, k_3\} \cap K(b_0, b_1) = \emptyset$ . In diesem Fall ist  $k_2 \in K[b_1, a_0]$  und  $k_3 \in K(a_1, b_0]$ . Dann gibt es in  $B^*$  einen Knoten  $u$ , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu  $\{k_1, k_2, k_3\}$  existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, u\}$  und  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .

**Fall 2:**  $B^*$  hat nur Kontaktpunkte  $k \in \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . In diesem Fall müssen alle vier Punkte zu  $B^*$  gehören und es gibt in  $B^*$  einen  $a_0$ - $b_0$ -Pfad  $P_0$  sowie einen  $a_1$ - $b_1$ -Pfad  $P_1$ .

**Fall 2a:**  $P_0$  und  $P_1$  haben nur einen Knoten  $u$  gemeinsam. Dann gibt es in  $B^*$  vier knotendisjunkte Pfade von  $u$  zu  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$  und somit 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten  $u, a_0, a_1, b_0, b_1$ .

**Fall 2b:**  $P_0$  und  $P_1$  haben mindestens zwei Knoten gemeinsam. Seien  $u$  der erste und  $v$  der letzte Knoten auf  $P_0$ , die auch auf  $P_1$  liegen. Dann gibt es in  $B^*$  drei knotendisjunkte Pfade zwischen  $u$  und allen Knoten in  $\{v, a_0, a_1\}$  und zwei zwischen  $v$  und allen Knoten in  $\{b_0, b_1\}$ . Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, v\}$  und  $\{b_0, b_1, u\}$ . ■

**Definition 96.** *Seien  $G, H$  Graphen.  $H$  heißt **Minor** von  $G$ , wenn sich  $H$  aus einem zu  $G$  isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen lässt:*

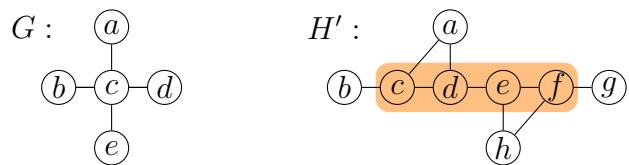
- Entfernen von Kanten,

- Entfernen von isolierten Knoten und
- Kontraktion von Kanten.

$G$  heißt  **$H$ -frei**, falls  $H$  kein Minor von  $G$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen heißt  $G$   **$\mathcal{H}$ -frei**, falls  $G$  für alle  $H \in \mathcal{H}$   $H$ -frei ist.

Da die Kantenkontraktionen zuletzt ausgeführt werden können, ist  $H$  genau dann ein Minor von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  zu  $H$  kontrahierbar ist. Zudem ist leicht zu sehen, dass  $G$  und  $H$  genau dann Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

**Beispiel 97.** Wir betrachten nochmals die Graphen  $G$  und  $H'$ .

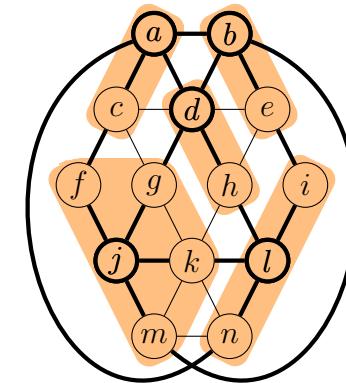


$G$  ist ein Minor von  $H'$ , da durch Fusion der Knoten  $c, d, e, f$  ein zu  $G$  isomorpher Graph aus  $H'$  entsteht.  $\triangleleft$

Wagner beobachtete, dass sich aus dem Satz von Kuratowski folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen ableiten lässt (siehe Übungen).

**Korollar 98** (Wagner 1937). Ein Graph ist genau dann planar, wenn er  $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.

**Beispiel 99.** Betrachte folgenden Graphen.



Durch Entfernen der dünnen Kanten entsteht eine Unterteilung des  $K_5$ . Aus dieser erhalten wir den  $K_5$ , indem wir alle dünn umrandeten Knoten (also alle Knoten vom Grad 2) überbrücken.

Alternativ lässt sich der  $K_5$  auch durch Fusion aller Knoten in den farblich unterlegten Umgebungen der dick umrandeten Knoten gewinnen.  $\triangleleft$

**Definition 100.** Sei  $\leq$  eine binäre Relation auf einer Menge  $A$ .

- $(A, \leq)$  heißt **Quasiordnung**, wenn  $\leq$  reflexiv und transitiv auf  $A$  ist.
- $(A, \leq)$  heißt **Wohlquasiordnung**, wenn es zudem zu jeder Folge  $a_1, a_2, \dots$  von Elementen aus  $A$  Indizes  $i < j$  mit  $a_i \leq a_j$  gibt.

**Proposition 101.** Eine Quasiordnung  $(A, \leq)$  ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in  $(A, \leq)$  weder unendliche absteigende Ketten  $a_1 > a_2 > \dots$  noch unendliche Antiketten  $B$  gibt (d.h. für alle  $b \neq b' \in B$  gilt  $b \leq b'$  noch  $b' \leq b$ ).

*Beweis.* Es ist klar, dass  $(A, \leq)$  keine Wohlquasiordnung ist, wenn es eine unendliche absteigende Kette oder eine unendliche Antikette gibt.

Wenn umgekehrt weder unendliche absteigende Ketten noch unendliche Antikette existieren, so können wir in jeder Folge  $a_1, a_2, \dots$  alle

Elemente  $a_j$  streichen, für die ein  $i < j$  existiert, so dass  $a_i > a_j$  ist. Da hierbei von jeder absteigenden Kette ein Element in der Folge verbleibt und alle diese Ketten endlich sind, enthält die verbleibende Folge immer noch unendlich viele Elemente.

Als nächstes streichen wir alle Elemente  $a_j$ , für die ein  $i < j$  existiert, so dass  $a_i$  und  $a_j$  unvergleichbar sind. Die verbleibende Folge ist dann immer noch unendlich und sogar monoton, d.h. es gilt  $a_i \leq a_{i+1}$  für alle  $i$ . ■

**Proposition 102.** *In einer Wohlquasiordnung  $(A, \leq)$  hat jede Teilmenge  $B \subseteq A$  bis auf Äquivalenz nur endlich viele minimale Elemente. Dabei heißen  $a, b \in A$  äquivalent, falls  $a \leq b$  und  $b \leq a$  gilt.*

**Satz 103** (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). *Die Minorenrelation bildet auf der Menge aller endlichen ungerichteten Graphen eine Wohlquasiordnung.*

**Korollar 104.** *Sei  $\mathcal{K}$  eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn  $G \in \mathcal{K}$  und  $H$  ein Minor von  $G$  ist, dann folgt  $H \in \mathcal{K}$ ). Dann gibt es eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

Die Graphen in  $\mathcal{H}$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbotene Minoren** für die Klasse  $\mathcal{K}$ . Für den Beweis des Korollars betrachten wir die komplementäre Klasse  $\overline{\mathcal{K}}$  aller endlichen Graphen, die nicht zu  $\mathcal{K}$  gehören. Nach Satz 103 in Kombination mit Proposition 102 hat  $\overline{\mathcal{K}}$  bis auf Isomorphie nur endlich viele minimale Elemente. Da mit  $H$  auch jeder Graph  $G$ , der  $H$  als Minor enthält, zu  $\overline{\mathcal{K}}$  gehört, gibt es demnach eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit

$$\overline{\mathcal{K}} = \{G \mid \exists H \in \mathcal{H} : H \text{ ist ein Minor von } G\},$$

womit Korollar 104 bewiesen ist.

Das Problem, für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $H$  ein Minor von  $G$  ist, ist zwar NP-vollständig. Für einen festen Graphen  $H$  ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

**Satz 105** (Robertson und Seymour, 1995). *Für jeden Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  entscheidet, ob er  $H$ -frei ist.*

**Korollar 106.** *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse  $\mathcal{K}$  ist in P entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für  $\mathcal{K}$  kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 103 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass  $\mathcal{K}$  unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  führt.

## 5.2 Färben von chordalen Graphen

**Definition 107.** *Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **chordal**, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  enthält.*

Ein induzierter Kreis  $G[\{u_1, \dots, u_k\}]$  enthält also nur die Kreiskanten  $\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{k-1}, u_k\}, \{u_k, u_1\}$ , aber keine **Sehnen**  $\{u_i, u_j\}$  mit  $i - j \not\equiv_k \pm 1$ .

**Definition 108.** *Sei  $G$  ein Graph. Eine Menge  $S \subseteq V$  heißt **Separator** von  $G$ , wenn  $G - S$  mehr Komponenten als  $G$  hat.*

**Lemma 109.** *Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $G$  ist chordal.
- (ii) Jeder inklusionsminimale Separator von  $G$  ist eine Clique.
- (iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  in  $G$  hat einen inklusionsminimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , der eine Clique ist.

*Beweis.* Sei  $G$  chordal und sei  $S$  ein minimaler Separator von  $G$ . Dann hat  $G - S$  mindestens zwei Komponenten  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$ . Angenommen,  $S$  enthält zwei nicht adjazente Knoten  $x$  und  $y$ . Da  $S$  minimal ist, sind beide Knoten sowohl mit  $G[V_1]$  als auch mit  $G[V_2]$  verbunden. Betrachte die beiden Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup \{x, y\}]$  und wähle jeweils einen kürzesten  $x$ - $y$ -Pfad  $P_i$  in  $G_i$ . Da diese eine Länge  $\geq 2$  haben, bilden sie zusammen einen Kreis  $K = P_1 \cup P_2$  der Länge  $\geq 4$ . Aufgrund der Konstruktion von  $K$  ist klar, dass  $K$  keine Sehne in  $G$  hat. Dies zeigt, dass die erste Aussage die zweite impliziert.

Dass die zweite die dritte impliziert, ist klar. Um zu zeigen, dass die erste aus der dritten folgt, nehmen wir an, dass  $G$  nicht chordal ist. Dann gibt es in  $G$  einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$ . Seien  $x$  und  $y$  zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf  $K$  und sei  $S$  ein minimaler  $x$ - $y$ -Separator in  $G$ . Dann muss  $S$  mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus  $K$  enthalten. ■

**Definition 110.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \geq 0$ . Ein Knoten  $u \in V$  heißt  **$k$ -simplizial** in  $G$ , wenn die Nachbarschaft  $N(u)$  eine Clique der Größe  $k$  in  $G$  bildet. Jeder  $k$ -simpliziale Knoten wird auch als **simplizial** bezeichnet.

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph  $G$  ist ein Baum, wenn er aus  $K_1$  durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt  $G$   **$k$ -Baum**, wenn  $G$  aus  $K_k$  durch sukzessives Hinzufügen von  $k$ -simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph  $G$  genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass  $G$  durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

**Definition 111.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(v_1, \dots, v_n)$  auf  $V$  heißt **perfekte Eliminationsordnung** von  $G$ , wenn  $v_i$  simplizial in  $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$  für  $i = 1, \dots, n$  ist.

**Lemma 112.** Jeder nicht vollständige chordale Graph  $G = (V, E)$  besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht durch eine Kante verbunden sind.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 2$  ist die Behauptung klar. Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Falls  $G$  nicht vollständig ist, enthält  $G$  zwei nichtadjazente Knoten  $x_1$  und  $x_2$ . Sei  $S$  ein minimaler  $x_1$ - $x_2$ -Separator und seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten von  $G - S$  mit  $x_i \in V_i$ . Nach Lemma 109 ist  $S$  eine Clique in  $G$ . Betrachte die Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup S]$ . Da  $G_i$  chordal ist und weniger als  $n$  Knoten hat, ist  $V_i \cup S$  entweder eine Clique oder  $G_i$  enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten  $y_i, z_i$ , wovon höchstens einer zu  $S$  gehört. Da im zweiten Fall  $y_i$  oder  $z_i$  in  $V_i$  ist, ist mindestens einer der drei Knoten  $x_i, y_i$  und  $z_i$  ohne Nachbarn in  $G[V_{3-i}]$  und somit auch simplizial in  $G$ . ■

**Satz 113.** Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine perfekte Eliminationsordnung hat.

*Beweis.* Falls  $G$  chordal ist, lässt sich eine perfekte Eliminationsordnung gemäß Lemma 112 bestimmen, indem wir beginnend mit  $i = n$  sukzessive einen simplizialen Knoten  $v_i$  in  $G[V - \{v_{i+1}, \dots, v_n\}]$  wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine perfekte Eliminationsordnung von  $G$ . Wir zeigen induktiv, dass  $G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}]$  chordal ist. Da  $v_{i+1}$  simplizial in  $G_{i+1}$  ist, enthält jeder Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_{i+1}$ , auf dem  $v_{i+1}$  liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von  $v_{i+1}$ . Daher ist mit  $G_i$  auch  $G_{i+1}$  chordal. ■

**Korollar 114.** Es gibt einen Algorithmus A, der das Erkennungsproblem für chordale Graphen in Polynomialzeit löst. A gibt zudem eine perfekte Eliminationsordnung, eine  $k$ -Färbung sowie eine  $k$ -Clique mit  $k = \chi(G) = \omega(G)$  von  $G$  aus, falls  $G$  chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$ .

*Beweis.* A versucht wie im Beweis von Theorem 113 beschrieben, eine perfekte Eliminationsordnung zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass  $G_i = G[V - \{v_{i+1}, \dots, v_n\}]$  keinen simplizialen Knoten  $v_i$  hat, so ist  $G_i$  wegen Lemma 112 nicht chordal. Folglich gibt es wegen Lemma 109 in  $G_i$  zwei nicht adjazente Knoten  $x$  und  $y$ , so dass kein minimaler  $x$ - $y$ -Separator  $S$  eine Clique ist. Wie im Beweis von Lemma 109 beschrieben, lässt sich mithilfe von  $S$  ein induzierter Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_i$  konstruieren. Da  $G_i$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  ist, ist  $K$  auch ein induzierter Kreis in  $G$ .

Gelingt die Konstruktion einer perfekten Eliminationsordnung  $(v_1, \dots, v_n)$  für  $G$ , so benutzen wir **greedy-color** mit dieser Reihenfolge, um eine Färbung  $f : G \rightarrow \{1, \dots, k\}$  für  $G$  zu berechnen. Ist  $v_i$  ein beliebiger Knoten mit  $f(v_i) = k$ , so muss  $v_i$  mindestens  $k - 1$  Nachbarn in der Menge  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  haben. Folglich bildet  $v_i$  zusammen mit diesen Nachbarn eine  $k$ -Clique, woraus  $k = \chi(G) = \omega(G)$  folgt. ■

### 5.3 Kantenfärbcungen

**Definition 115.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine Abbildung  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Kantenfärbung** von  $G$ , wenn  $f(e) \neq f(e')$  für alle Kanten  $e, e'$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$  gilt.
- b)  $G$  heißt  **$k$ -kantenfärbbbar**, falls eine Kantenfärbung  $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.

c) Die **kantenchromatische Zahl** oder der **chromatische Index** von  $G$  ist

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbbar}\}.$$

Ist  $f$  eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ , so bildet jede **Farbkasse**  $M_i = \{e \in E \mid f(e) = i\}$  ein Matching in  $G$ , d.h.  $f$  zerlegt  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings  $M_1, \dots, M_k$ . Umgekehrt liefert jede Zerlegung von  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ .

**Beispiel 116.**

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 3, & n \text{ ungerade}, \\ 2, & sonst, \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = 2\lceil n/2 \rceil - 1 = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade}, \\ n - 1, & sonst, \end{cases}$$

(siehe Übungen).

**Lemma 117.** Für jeden nicht leeren Graphen gilt  $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta - 1$  und  $m/\mu \leq \chi' \leq 2\lceil n/2 \rceil - 1$ .

*Beweis.* Siehe Übungen. ■

**Korollar 118.** Für jeden nicht leeren  $k$ -regulären Graphen mit einer ungeraden Knotenzahl gilt  $\chi'(G) > k$ .

*Beweis.* Wegen  $\mu \leq (n - 1)/2$  und  $2m = n\Delta$  folgt  $\chi' \geq m/\mu \geq n\Delta/(n - 1) > \Delta = k$ . ■

**Lemma 119.** Für jeden bipartiten Graphen gilt  $\chi' = \Delta$ .

*Beweis.* Siehe Übungen. Dort wird die Aussage sogar für bipartite Multigraphen (d.h. zwei Knoten können durch mehrere Kanten verbunden sein) bewiesen. ■

Als nächstes geben wir einen Algorithmus an, der für jeden Graphen  $G$  eine  $k$ -Kantenfärbung mit  $k \leq \Delta(G) + 1$  berechnet. Für den Beweis benötigen wir folgende Begriffe.

**Definition 120.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

a) Ein Knoten  $u \in V$  heißt **d-gradig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\deg(u) \leq d$ ,
- alle Nachbarn  $v \in N(u)$  haben einen Grad  $\deg(v) \leq d$  und
- $\|\{v \in N(u) \mid \deg(v) = d\}\| \leq 1$ .

b)  $u$  heißt **stark d-gradig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\deg(u) = d$ ,
- für alle  $v \in N(u)$  gilt  $d - 1 \leq \deg(v) \leq d$  und
- $\|\{v \in N(u) \mid \deg(v) = d\}\| = 1$ .

Sei  $u$  ein Knoten in einem Graphen  $G$  und sei  $f$  eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G - u$  mit zugehöriger Partition  $M_1, \dots, M_k$ . Dann bezeichnet  $N_i(u) = N(u) \cap \text{free}(M_i)$  die Menge der Nachbarn  $v$  von  $u$ , für die die Farbe  $i$  noch frei ist (d.h. es ist möglich, die Kante  $\{u, v\}$  mit  $i$  zu färben). Wir sagen  $f$  **blockiert** die Farbe  $i$ , falls  $N_i(u) = \emptyset$  ist.

Das nächste Lemma ist eine direkte Folgerung aus obiger Definition.

**Lemma 121.** Sei  $u$  ein stark  $k$ -gradiger Knoten in  $G$  und sei  $f$  eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G - u$ . Dann erfüllen die Anzahlen  $a_i = \|N_i(u)\|$  folgende Bedingungen:

- (i)  $\sum_{i=1}^k a_i = 2k - 1$ ,
- (ii) falls  $f$  eine Farbe blockiert, dann gibt es eine Farbe  $j$  mit  $a_j \geq 3$ ,
- (iii) falls  $f$  keine Farbe blockiert, dann gibt es eine Farbe  $j$  mit  $a_j = 1$ .

**Lemma 122.** Sei  $u$  ein stark  $k$ -gradiger Knoten in  $G = (V, E)$  und sei  $G - u$   $k$ -kantenfärbar. Dann hat  $G - u$  eine  $k$ -Kantenfärbung  $g$ , die keine Farbe blockiert.

*Beweis.* Sei  $f$  eine  $k$ -Kantenfärbung für  $G - u$ . Falls  $f$  eine Farbe  $i$  blockiert, gibt es nach Lemma 121 eine Farbe  $j$  mit  $a_j \geq 3$ .

Betrachte den Graphen  $H = (V, M_i \cup M_j)$ . Sei  $v$  ein beliebiger Knoten in  $N_j(u)$ . Da  $v \notin \text{free}(M_i)$  und somit Endpunkt einer Kante in  $M_i$  ist, folgt  $\deg_H(v) = 1$ . Sei  $P$  ein bzgl. Inklusion maximaler Pfad in  $H$  mit Startknoten  $v$ . Da  $\Delta(H) \leq 2$  ist, ist  $P$  eine Zusammenhangskomponente von  $H$ . Vertauschen wir daher die Farben  $i$  und  $j$  von allen Kanten auf  $P$ , so erhalten wir wieder eine  $k$ -Kantenfärbung  $f'$  für  $G - u$ . Für diese sind  $a'_i$  und  $a'_j$  größer 0, da  $v \in \text{free}(M'_i)$  ist und  $\text{free}(M'_j)$  höchstens 2 Knoten verliert (nämlich  $v$  und evtl. den anderen Endpunkt von  $P$ ).

Folglich blockiert  $f'$  eine Farbe weniger als  $f$  und wir können diesen Prozess fortsetzen, bis keine Farben mehr blockiert sind. ■

**Lemma 123.** Sei  $u$  ein  $k$ -gradiger Knoten in  $G = (V, E)$  und sei  $g$  eine  $k$ -Kantenfärbung für  $G - u$ . Dann lässt sich aus  $g$  eine  $k$ -Kantenfärbung  $f$  für  $G$  konstruieren.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $k$ . Im Fall  $k = 1$  ist  $u$  höchstens mit einem Knoten in  $G$  verbunden und daher lässt sich  $g$  leicht zu einer 1-Färbung für  $G$  erweitern.

Ist  $k \geq 2$ , so modifizieren  $G$  zuerst zu einem Graphen  $G'$ , so dass  $u$  stark  $k$ -gradig in  $G'$  ist. Hierzu erweitern wir die Nachbarschaft von  $u$  durch Hinzunahme von Blattknoten auf die Größe  $k$ . Anschließend vergrößern wir die Nachbarschaft  $N(v)$  jedes Knotens  $v \in N(u)$  auf dieselbe Weise, wobei wir sicherstellen, dass genau ein Nachbar von  $u$  den Grad  $k$  und alle anderen den Grad  $k - 1$  haben. Zudem erweitern wir  $g$  zu einer  $k$ -Kantenfärbung  $g'$  für  $G' - u$ .

Nun benutzen wir Lemma 122, um  $g'$  in eine  $k$ -Kantenfärbung  $f'$  für  $G' - u$  zu transformieren, die keine Farbe blockiert. Nach Lemma 121 gibt es eine Farbe  $j$  mit  $a'_j = 1$ . Sei  $v$  der einzige Nachbar von  $u$  in  $G'$ , dessen Kanten nicht mit  $j$  gefärbt sind. Nun entfernen wir die Kante

$\{u, v\}$  sowie alle mit  $j$  gefärbten Kanten aus  $G'$  und färben alle mit  $k$  gefärbten Kanten mit  $j$ . Dann haben in dem resultierenden Graphen  $G''$  sowohl  $u$  als auch alle seine Nachbarn einen um 1 kleineren Grad, d.h.  $u$  ist  $(k - 1)$ -gradig (aber evtl. nicht stark  $(k - 1)$ -gradig) in  $G''$ . Zudem liefert die Einschränkung  $f''$  von  $f'$  auf die Kanten von  $G'' - u$  eine  $(k - 1)$ -Kantenfärbung für diesen Graphen.

Nach IV lässt sich aus  $f''$  eine  $(k - 1)$ -Kantenfärbung  $g''$  für  $G''$  konstruieren. Färben wir nun die aus  $G'$  entfernten Kanten mit  $k$ , so erhalten wir eine  $k$ -Kantenfärbung für  $G'$  und daraus eine für  $G$ . ■

**Satz 124** (Vizing). *Für jeden Graphen gilt  $\chi' \leq \Delta + 1$ .*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Der Fall  $n = 1$  ist trivial.

Im Fall  $n \geq 2$  wählen wir einen beliebigen Knoten  $u$  in  $G$ . Dann ist  $u$   $d$ -gradig für ein  $d \leq \Delta(G) + 1$ . Sei  $k = \max\{\Delta(G - u) + 1, d\}$ . Nach IV hat  $G - u$  eine  $k$ -Kantenfärbung, aus der wir nach Lemma 123 eine  $k$ -Kantenfärbung für  $G$  konstruieren können. ■

Da der Beweis von Satz 124 konstruktiv ist, können wir daraus leicht einen Algorithmus ableiten.

### Algorithmus Vizing

---

```

1  input Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ 
2   $f := \emptyset$ 
3  for  $\ell := 2$  to  $n$  do
4     $f :=$  erweitere-faerbung( $f, u_\ell, G[\{u_1, \dots, u_\ell\}]$ )

```

---

### Prozedur erweitere-faerbung( $f, u, G$ )

---

```

1   $k := \Delta(G) + 1$ 
2  while  $\deg(u) < k$  do
3    füge einen neuen Blattnachbarn von  $u$  hinzu
4    for all  $v \in N(u)$  do
5      if  $\deg(v) < k - 1$  then

```

---



---

```

6      füge  $k - 1 - \deg(v)$  neue Blattnachbarn von  $v$ 
7      hinzu und erweitere  $f$  auf die neuen Kanten
8   $S := N(u); C := \{1, \dots, k\}$ 
9  while  $S \neq \emptyset$  do
10    if  $\forall v \in S : \|\{i \in C \mid v \in \text{free}(M_i)\}\| = 2$  then
11      wähle einen beliebigen Knoten  $v \in S$ 
12      füge einen neuen Blattnachbarn von  $v$  hinzu
13      und erweitere  $f$  auf die neue Kante
14    while  $\exists i \in C : N_i(u) = \emptyset$  do
15      wähle  $j \in C$  mit  $\|N_j(u)\| \geq 3$ 
16      berechne einen inklusionsmaximalen Pfad  $P$ 
17      in  $G[M_i \cup M_j]$  mit Startpunkt in  $N_j(u)$ 
18      vertausche die Farben  $i$  und  $j$  auf  $P$ 
19      wähle  $i \in C$  mit  $\|N_i(u)\| = 1$  und sei  $N_i(u) = \{v\}$ 
20       $f(\{u, v\}) := i; C := C \setminus \{i\}; S := S \setminus \{v\}$ 
21   $f :=$  Einschränkung von  $f$  auf die Kanten in  $G$ 
22  return  $f$ 

```

---

Die Prozedur **erweitere-faerbung**( $f, u, G$ ) erweitert eine  $k$ -Kantenfärbung  $f$  von  $G - u$  zu einer  $k$ -Kantenfärbung  $f$  von  $G$ , wobei  $k = \Delta(G) + 1$  ist. Hierzu wird  $G$  durch Hinzufügen von Blattknoten so zu einem Graphen  $G'$  erweitert, dass  $u$  stark  $k$ -gradig in  $G'$  ist. Anschließend wird  $f$  auf die mit  $u$  inzidenten Kanten in  $G'$  fortgesetzt. Schließlich wird die Einschränkung von  $f$  auf die Kanten in  $G$  zurückgegeben.

Die innere while-Schleife wird für jede blockierte Farbe einmal durchlaufen. Da zu Beginn höchstens  $k$  Farben blockiert sind und bei jedem der  $\|S\| = k$  Durchläufe der äußeren while-Schleife maximal eine Farbe blockiert wird, wird die innere while-Schleife insgesamt höchstens  $2k$ -mal durchlaufen.

Damit der Pfad  $P$  in Zeit  $O(n)$  gefunden werden kann, speichern wir für jeden Knoten  $v$  und jede Farbe  $j$  den Matchingpartner  $M_j(v)$  von  $v$  in einer  $(k \times n)$ -Matrix  $M[i, v]$ . Dabei setzen wir  $M[i, v] = \perp$ ,

falls  $v \in \text{free}(M_i)$  ist. Nun ist leicht zu sehen, dass die Prozedur **erweiterte-färbung** eine Laufzeit von  $O(kn)$  und somit der Algorithmus **Vizing** eine Laufzeit von  $O(n^2\Delta(G))$  hat.

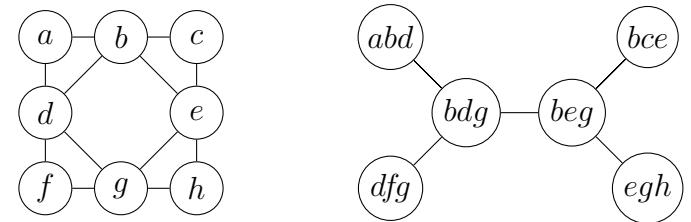
## 6 Baum- und Pfadweite

**Definition 125.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- a) Eine **Baumzerlegung** von  $G$  ist ein Paar  $(T, X)$ , wobei  $T = (V_T, E_T)$  ein Baum und  $X = \{X_t \mid t \in V_T\}$  eine Familie von Untermengen von  $V$  ist, so dass gilt:
  - für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gibt es ein  $t \in V_T$  mit  $\{u, v\} \subseteq X_t$ ,
  - für jeden Knoten  $u \in V$  ist der durch  $X^{-1}(u) := \{t \in V_T \mid u \in X_t\}$  induzierte Untergraph  $T[X^{-1}(u)]$  von  $T$  zusammenhängend.
- b) Die **Weite** von  $(T, X)$  ist  $w(T, X) = \max_{t \in V_T} \|X_t\| - 1$ .
- c) Die **Baumweite**  $tw(G)$  von  $G$  ist die kleinste Weite aller möglichen Baumzerlegungen von  $G$ .
- d) Eine Baumzerlegung  $(T, X)$  von  $G$  heißt **Pfadzerlegung**, wenn  $T$  ein Pfad ist. Die **Pfadweite**  $pw(G)$  von  $G$  ist die kleinste Weite aller möglichen Pfadzerlegungen von  $G$ .

Die Mengen  $X_t$  werden als **Taschen** (engl. bags) bezeichnet.

**Beispiel 126.** (i) Betrachte folgenden Graphen  $G$ :

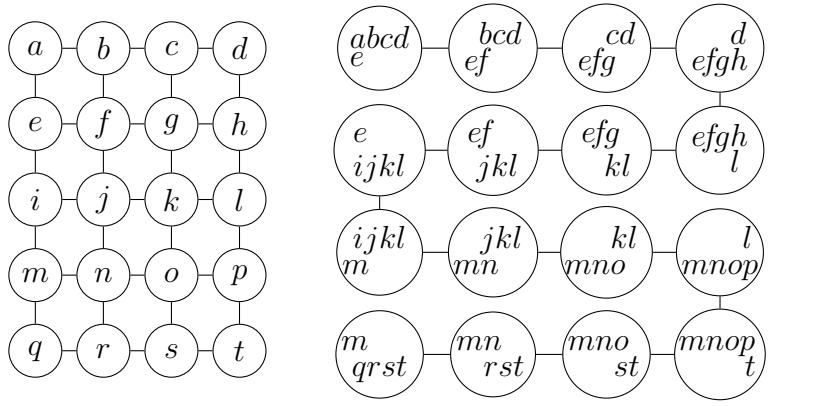


$G$  hat eine Baumzerlegung mit den Taschen  $X_1 = \{a, b, d\}$ ,  $X_2 = \{b, d, g\}$ ,  $X_3 = \{b, e, g\}$ ,  $X_4 = \{b, e, c\}$ ,  $X_5 = \{e, g, h\}$ ,  $X_6 = \{d, f, g\}$  und dem Baum  $T = (\{1, \dots, 6\}, E_T)$ , wobei  $E_T$  folgende Kanten enthält:  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{2, 6\}$ .

(ii) Sei  $G_{k \times \ell} = P_k \times P_\ell$  der  $(k \times \ell)$ -Gittergraph mit  $k\ell$  Knoten. Dann gilt

$$tw(G_{k \times \ell}) \leq pw(G_{k \times \ell}) \leq \min\{k, \ell\}.$$

Der Graph  $G_{5 \times 4}$  hat bspw. folgende Pfadzerlegung der Weite 4:



▫

**Proposition 127.**

- Ein Graph  $G$  hat genau dann die Baumweite  $tw(G) = 0$ , wenn  $G$  keine Kanten hat.
- Jeder nicht leere Wald  $W$  hat Baumweite  $tw(W) = 1$ .

**Definition 128.** Eine Baumzerlegung  $(T, X)$  heißt **kompakt**, wenn alle Taschen paarweise unvergleichbar sind, d.h. für alle  $s \neq t \in V_T$  gilt  $X_s \not\subseteq X_t$  und  $X_t \not\subseteq X_s$ .

**Proposition 129.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- (i) Jede Baumzerlegung  $(T, X)$  von  $G$  lässt sich in Polynomialzeit in eine kompakte Baumzerlegung  $(T', X')$  von  $G$  transformieren, die nur Taschen aus  $X$  enthält.

(ii) Für jede kompakte Baumzerlegung  $(T, X)$  von  $G$  gilt  $n(T) \leq n(G)$ .

(iii) Für jeden Untergraphen  $H$  von  $G$  gilt  $tw(H) \leq tw(G)$  und  $pw(H) \leq pw(G)$ .

(iv) Für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt  $tw(G_{uv}) \leq tw(G)$  und  $pw(G_{uv}) \leq pw(G)$ .

**Korollar 130.** Für jeden Minor  $H$  eines Graphen  $G$  gilt  $tw(H) \leq tw(G)$  und  $pw(H) \leq pw(G)$ .

Als nächstes zeigen wir, dass  $tw(G) \geq \omega(G) - 1$  ist. Für 2 Teilbäume  $T'$  und  $T''$  eines Baumes  $T$  bezeichne  $d_T(T', T'')$  die minimale Länge eines Pfades  $P$  im Baum  $T$ , der einen Knoten  $u \in T'$  mit einem Knoten  $v \in T''$  verbindet. Man beachte, dass der kürzeste Pfad  $P$  zwischen  $T'$  und  $T''$  im Fall  $d_T(T', T'') > 0$  eindeutig bestimmt ist und der einzige Pfad zwischen  $T'$  und  $T''$  ist, dessen innere Knoten weder zu  $T'$  noch zu  $T''$  gehören.

**Lemma 131.** Seien  $T_1, \dots, T_k, S$  Teilbäume von  $T$ , so dass  $T_1 \cap \dots \cap T_k \neq \emptyset$  ist. Dann gilt

$$d_T(T_1 \cap \dots \cap T_k, S) \leq \max\{d_T(T_i, S) \mid i = 1, \dots, k\}.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $k$ . Für  $k = 1$  ist nichts zu zeigen. Im Fall  $k \geq 2$  gilt für  $S' = T_1 \cap \dots \cap T_{k-1}$  nach IV, dass  $d_T(S', S) \leq \max\{d_T(T_i, S) \mid i = 1, \dots, k-1\}$  ist. Daher reicht es zu zeigen, dass  $d_T(S' \cap T_k, S) \leq \max\{d_T(S', S), d_T(T_k, S)\}$  ist. Sei  $d = d_T(S' \cap T_k, S) > 0$  und sei  $P = (u_1, \dots, u_d)$  der kürzeste Pfad zwischen  $S' \cap T_k$  und  $S$ . Dann gehören  $u_2, \dots, u_d$  alle nicht zu  $S'$  oder alle nicht zu  $T_k$ . Somit ist  $P$  kürzester  $S'-S$  Pfad oder kürzester  $T_k-S$  Pfad. ■

**Definition 132.** Ein Mengensystem  $X = \{X_i \mid i \in I\}$  hat die **Helly-Eigenschaft**, wenn für jede Teilmenge  $J \subseteq I$  gilt:

$$(\forall i, j \in J : X_i \cap X_j \neq \emptyset) \Rightarrow \bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset.$$

**Lemma 133.** Die Knotenmengen aller Unterbäume eines Baumes  $T$  haben die Helly-Eigenschaft.

*Beweis.* Sei  $Z = \{T_1, \dots, T_k\}$  eine beliebige Menge von Unterbäumen von  $T$ , so dass je zwei Unterbäume  $T_i$  und  $T_j$  aus  $Z$  einen nicht leeren Schnitt haben. Wir zeigen induktiv über  $k = \|Z\|$ , dass dann auch  $\bigcap Z$  nicht leer ist.

Für  $k \leq 2$  ist nichts zu zeigen. Im Fall  $k \geq 3$  gilt nach IV, dass  $T' = \bigcap_{i=1}^{k-1} T_i \neq \emptyset$  ist. Zudem folgt mit obigem Lemma, dass  $d_T(T', T_k) \leq \max\{d_T(T_i, T_k) \mid i = 1, \dots, k-1\} = 0$  und somit  $T' \cap T_k \neq \emptyset$  ist. ■

**Satz 134.** Sei  $(T, X)$  eine Baumzerlegung eines Graphen  $G$  und sei  $C$  eine Clique in  $G$ . Dann gibt es eine Tasche  $X_t$ , in der  $C$  enthalten ist.

*Beweis.* Da je 2 Knoten  $u, v \in C$  durch eine Kante verbunden sind, gibt es eine Tasche  $X_t$  mit  $\{u, v\} \in X_t$ . Folglich haben die zugehörigen Unterbäume  $X^{-1}(u)$  und  $X^{-1}(v)$  mindestens einen Knoten  $t$  gemeinsam. Nach Lemma 133 gibt es daher einen Knoten, der in allen Unterbäumen  $X^{-1}(u)$  mit  $u \in C$  enthalten ist. ■

**Korollar 135.**

- (i)  $\omega(G) \leq tw(G) + 1$ ,
- (ii)  $tw(K_n) = n - 1$ .

**Definition 136.** Eine Baumzerlegung  $(T, X)$  von  $G$  heißt **Baumzerlegung in Cliques**, wenn alle Taschen Cliques in  $G$  sind.

**Lemma 137.** Ein Graph  $G$  ist genau dann chordal, wenn er eine Baumzerlegung in Cliques hat.

Frage: Welche Graphen haben eine Pfadzerlegung in Cliques?

**Definition 138.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann heißt ein Graph  $H = (V, E')$  eine **chordale Erweiterung** von  $G$ , wenn  $H$  chordal und  $G$  ein Teilgraph von  $H$  ist.

**Lemma 139.**  $tw(G) = \min\{\omega(H) - 1 \mid H \text{ ist eine chordale Erweiterung von } G\}$ .

*Beweis.*  $\leq$ : Sei  $H$  ein beliebiger chordaler Graph, der  $G$  als Subgraph enthält. Dann hat  $H$  eine Baumzerlegung  $(T, X)$  in Cliques. Da jede Clique  $C$  in  $G$  auch eine Clique in  $H$  ist, folgt

$$tw(G) \leq \omega(G) - 1 \leq \omega(H) - 1.$$

$\geq$ : Sei  $(T, X)$  eine Baumzerlegung von  $G$  der Weite  $w = tw(G)$ . Fügen wir alle Kanten  $\{u, v\}$  zu  $G$  hinzu, für die  $u$  und  $v$  in einer gemeinsamen Tasche liegen, so ist der resultierende Graph  $H$  chordal und es gilt  $\omega(H) \leq w - 1$ . ■

**Definition 140.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und seien  $S, T \subseteq V$  zwei nichtleere disjunkte Knotenmengen in  $G$ . Dann heißt  $X \subseteq V$  ein  **$U-W$ -Separator** in  $G$ , wenn es in  $G - X$  keinen Pfad von einem Knoten  $u \in U$  zu einem Knoten  $w \in W$  gibt.

**Lemma 141.** Sei  $(T, X)$  eine Baumzerlegung von  $G = (V, E)$  und sei  $e = \{u, w\}$  eine Kante in  $T$ . Seien  $T_u$  und  $T_w$  die beiden Komponenten von  $T - e$  und seien  $X(T_u) = \bigcup_{t \in T_u} X_t$  und  $X(T_w) = \bigcup_{t \in T_w} X_t$ . Falls  $U = X(T_u) \setminus X(T_w)$  und  $W = X(T_w) \setminus X(T_u)$  beide nicht leer sind, ist  $X = X_u \cap X_w$  ein  $U-W$ -Separator in  $G$ .

*Beweis.* Wegen  $X_u \subseteq X(T_u)$  und  $X_w \subseteq X(T_w)$  folgt  $X = X_u \cap X_w \subseteq X(T_u) \cap X(T_w)$ . Da  $(T, X)$  eine Baumzerlegung ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion, d.h.  $X, U = X(T_u) \setminus X(T_w)$  und  $W = X(T_w) \setminus X(T_u)$  zerlegen  $V$  in 3 Mengen. Daher reicht es zu zeigen, dass in  $G$  keine Kante zwischen  $U$  und  $W$  existiert.

Sei  $\{a, b\} \in E$ . Dann gibt es eine Tasche  $X_t$  mit  $\{a, b\} \subseteq X_t$ . Falls  $t$  zu  $T_u$  gehört, folgt  $\{a, b\} \subseteq X(T_u)$  und somit  $\{a, b\} \cap W = \emptyset$ . Falls  $t$  zu  $T_w$  gehört, folgt  $\{a, b\} \subseteq X(T_w)$  und somit  $\{a, b\} \cap U = \emptyset$ . ■

**Satz 142.** Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\kappa(G) \leq tw(G)$ .

*Beweis.* Sei  $k = tw(G)$ . Dann hat  $G$  mindestens  $k + 1$  Knoten. Falls  $G$  genau  $k + 1$  Knoten hat, ist  $G$  höchstens  $k$ -fach zusammenhängend. Falls  $G$   $n > k + 1$  Knoten hat, sei  $(T, X)$  eine kompakte Baumzerlegung von  $G$  und sei  $e = \{u, w\}$  eine Kante in  $T$ . Da  $(T, X)$  kompakt ist, gilt  $X_u \setminus X_w \neq \emptyset$  und  $X_w \setminus X_u \neq \emptyset$  und somit  $\|X_u \cap X_w\| \leq k$ . Nach obigem Lemma ist  $X = X_u \cap X_w$  ein Separator in  $G$  und somit  $G$  höchstens  $k$ -fach zusammenhängend. ■

**Korollar 143.** Ein Graph  $G = (V, E)$  hat genau dann die Baumweite  $tw(G) = 1$ , wenn  $G$  ein Wald und  $E \neq \emptyset$  ist.

Frage: Welche Graphen  $G$  haben Pfadweite  $pw(G) = 1$ ?