Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11. Juli 2013

Aufgabe 55 Sei $1 \le k \le n$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine bzgl. Inklusion maximale Kantenmenge haben.

(b) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine maximale Anzahl von Kanten haben. Sei $e_k(n)$ diese Anzahl.

(c) Zeigen Sie $e_k(n)/\binom{n}{2} \to (1 - 1/k)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 56 ***mündlich***

(a) Geben Sie einen regulären Graphen an, der ein perfektes Matching besitzt, aber nicht 1-faktorisierbar ist (vgl. Aufgabe 4).

(b) Zeigen Sie, dass ein regulärer Graph G genau dann 1-faktorisierbar ist, wenn $\chi'(G) = \Delta(G)$ ist.

Aufgabe 57 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. ***mündlich***

Bezeichne $P_G(x)$ die Anzahl der x-Färbungen von G. Zeigen Sie.

(a) Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G_{uv}}(x)$.

(b) $P_G(x)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen x.

(c) Falls u k-simplizial in G ist, dann gilt $P_G(x) = (x - k)P_{G-u}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $P_G(x)$ für $G = E_n, K_n, C_n, P_n$ und für jeden Baum.

Aufgabe 58 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein 3-fach zusammenhängender Graph mit $n \ge 5$ Knoten. Zeigen Sie.

(a) G hat eine Kante $\{u, v\}$, so dass G_{uv} 3-fach zusammenhängend ist. *Hinweis:* Wählen Sie unter der Annahme, dass es zu jeder Kante $\{u, v\}$ einen Knoten w gibt, so dass $G - \{u, v, w\}$ unzusammenhängend ist, u, v, w so, dass $G - \{u, v, w\}$ eine Komponente mit maximaler Knotenzahl hat, und finden Sie eine Kante $\{x, w\}$ und einen Knoten y, so dass $G - \{x, w, y\}$ eine größere Komponente hat.

(b) Falls $G' = G_{uv}$ für eine Kante $\{u, v\} \in E$ 3-fach zusammenhängend ist, und sich eine ebene Realisierung H' von G' nicht zu einer ebenen Realisierung H von G erweitern lässt, so enthält der Teilgraph $G[\{u, v\} \cup N(u) \cup N(v)]$ eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$.

(c) Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus A an, der bei Eingabe von G entweder eine ebene Realisierung oder einen Teilgraphen von G ausgibt, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.

(d) Lässt sich A zu einem Polynomialzeitalgorithmus B erweitern, der für einen beliebigen Graphen eine ebene Realisierung oder einen zu K_5 oder $K_{3,3}$ homeomorphen Teilgraphen ausgibt?

Aufgabe 59 ***10 Punkte***

Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph (d.h. E ist eine Multimenge). Zeigen Sie.

(a) $\chi'(G) \le \Delta(G) + v(G)$, wobei $v(G)$ die maximale Vielfachheit einer Kante in E ist.

(b) $\chi'(G) \le (3/2)\Delta(G)$. *Hinweis:* Führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Sei H ein Multigraph mit $q = \chi'(H) > (3/2)\Delta(H)$ und $\chi'(H - e) = q - 1$ für alle Kanten e von H. Verwenden Sie (a), um eine $(q - 1)$-Kantenfärbung von $H - e$ auf H zu erweitern.

(c) E lässt sich in $k = \chi'(G)$ Matchings $M_1, \ldots, M_k$ von G zerlegen, so dass $\|M_i\| - \|M_j\| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle i, j gilt.

(d) Zwischen n Stationen sollen mehrere Datenpakete versendet werden. Jede Station kann pro Zeiteinheit höchstens ein Paket senden oder empfangen (aber nicht beides gleichzeitig). Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan für den Versand aller Datenpakete berechnet, falls Station i insgesamt p_{ij} Pakete an Station j senden möchte. Dabei soll die Gesamtdauer die minimal nötige Zeit um höchstens $\max_{i,j} p_{ij}$ Zeiteinheiten überschreiten und die Anzahl von gleichzeitig aktiven Datenleitungen minimiert werden.

(e) Wie lässt sich in (d) eine zeitoptimale Lösung effizient bestimmen, wenn Datenpakete nur zwischen Stationen i und j mit ungleicher Parität $i \not\equiv_2 j$ versendet werden?