Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 4. Juli 2013

Aufgabe 48 ***mündlich***

(a) Finden Sie einen Linearzeitalgorithmus, der für einen gegebenen planaren Graphen G eine 5-Färbung berechnet.

(b) Wieviele Farben benutzt Ihr Algorithmus, falls $\omega(G) \leq 2$ ist?

Aufgabe 49 ***mündlich***

Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für ein Tripel $G = (V, E, R)$ überprüft, ob G ein ebener Graph ist.

Aufgabe 50 Sei G nicht planar. Zeigen Sie. ***mündlich***

Falls G nicht 3-fach zusammenhängend ist, dann ist G zu einem nicht planaren Graphen mit weniger Kanten kontrahierbar.

Aufgabe 51 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein *maximal planarer* Graph (d.h. G ist planar und $(V, E \cup e)$ ist für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ nicht planar) und sei H eine ebene Realisierung von G. Zeigen Sie.

(a) Falls G $n \geq 3$ Knoten hat, wird jedes Gebiet g von H von $d(g) = 3$ Kanten umrandet und somit ist $m = 3n - 6$.

(b) Falls $n \geq 4$ ist, hat jeder Knoten $u \in V$ einen Grad $\deg(u) \geq 3$ und mindestens 4 Knoten haben einen Grad ≤ 5. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sum_{u \in V}(6 - \deg(u)) = 12$ ist.

(c) Falls $n \geq 3$ ist, gibt es für jedes Gebiet g von H eine Einbettung von G in die Ebene, in der g das äußere Gebiet ist und jedes andere Gebiet g' ein Dreieck bildet. *Hinweis:* Führen Sie Induktion über n und zeigen Sie, dass jedes überschneidungsfreie Polygon P mit ≤ 5 Eckpunkten einen Punkt A enthält, so dass für jeden Punkt B in P die Strecke $[AB]$ innerhalb von P verläuft.

(d) Jeder planare Graph ist geradlinig in die Ebene einbettbar.

Aufgabe 52 ***mündlich***

Zwei Graphen G und H heißen *homeomorph*, falls Unterteilungen G' von G und H' von H existieren mit $G' \cong H'$. Zeigen Sie.

(a) Falls K_5 oder $K_{3,3}$ Minoren von G sind, dann ist ein Teilgraph von G homeomorph zu K_5 oder $K_{3,3}$.

(b) Genau die $\{K_5,K_{3,3}\}$-freien Graphen sind planar (Satz von Wagner).

(c) Geben Sie einen Graphen an, der nicht planar und nicht zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbar ist.

(d) Geben Sie einen Graphen an, der nicht K_5-frei ist und keinen zu K_5 homeomorphen Teilgraphen hat.

Aufgabe 53 ***mündlich***

Seien $H = (V, E, R)$ und $H' = (V, E, S)$ ebene Realisierungen eines Graphen $G = (V, E)$. H und H' heißen *äquivalent*, wenn $R \in \{S, S^R\}$ ist (d.h. $R = S$ oder R entsteht aus S durch Spiegelung aller Ränder).

(a) Finden Sie einen Graphen mit möglichst wenigen Knoten (Kanten), der mindestens 2 inäquivalente ebene Realisierungen hat.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2$ ist, falls es in H ein Gebiet gibt, dessen Kanten einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in G bilden.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Gebiet g in H, das höchstens eine Brücke hat, äquivalent zu einem Gebiet g' in H' ist (d.h. $g = g'$ oder g entsteht aus g' durch Spiegelung des Randes).

(d) Zeigen Sie, dass alle ebenen Realisierungen eines 3-fach zusammenhängenden Graphen äquivalent sind (Satz von Whitney).

Aufgabe 54 ***10 Punkte***

Ein Graph G heißt *outerplanar*, falls G eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie.

(a) G ist genau dann outerplanar, wenn G $\{K_4, K_{2,3}\}$-frei ist.

(b) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der prüft, ob G outerplanar ist und im positiven Fall eine $\chi(G)$-Färbung berechnet.