Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 30. Mai 2013

Aufgabe 20 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich in jedem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ ein maximaler Fluss durch eine Folge $(P_1, \ldots, P_k)$ von $k \leq m$ Zunahmepfaden P_i konstruieren lässt, die nur Kanten in E enthalten.

Aufgabe 21 ***mündlich***

Schätzen Sie die Anzahl der Iterationen für den Ford-Fulkerson-Algorithmus ab, wenn in jedem Schleifendurchlauf ein Zunahmepfade P_i gewählt wird, der den aktuellen Fluss f_{i-1} um einen maximalen Wert $\Delta_i = |f_i| - |f_{i-1}|$ erhöht.

Hinweis: Sei f_{max} ein maximaler Fluss in N. Zeigen Sie, dass $\Delta_i \geq (|f_{max}| - |f_i|)/m$ ist, und folgern Sie $|f_{max}| - |f_i| \leq (|f_{max}| - |f_{i-1}|)/(1 - 1/m)$. Folgern Sie weiterhin $|f_{max}| - |f_i| \leq |f_{max}|(1 - 1/m)^i$ und verwenden Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$.

Aufgabe 22 ***mündlich***

Zeigen Sie dass sich in einem beliebigen Netzwerk, in dem es einen s-t-Pfad gibt, der maximale Flusswert erhöht, wenn die Kapazität jeder Kante um 1 erhöht wird. Angenommen, der maximale Flusswert erhöht sich dadurch um k, um welchen Wert steigt dann der maximale Flusswert, wenn alle Kapazitäten um den Wert d statt 1 erhöht werden?

Aufgabe 23 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen maximalen Fluss im Netzwerk N' berechnet, das aus N durch

(a) Erhöhen der Kapazität einer einzigen Kante um 1 entsteht.

(b) Erniedrigen der Kapazität einer einzigen Kante um 1 entsteht.

Aufgabe 24 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Aus N wird ein neues Netzwerk N' konstruiert, indem alle Kanten gespiegelt und s und t vertauscht werden. Welchen Wert hat ein maximaler Fluss f' in N'? Lässt sich ein solcher Fluss f' aus f gewinnen?

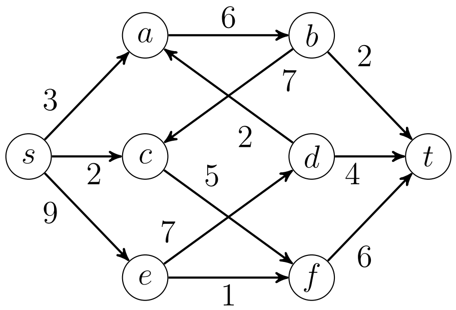
Aufgabe 25 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Sei $u \neq s, t$ ein Knoten in N und sei $f(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$ der (Brutto-)Fluss durch den Knoten u. Überlegen Sie sich einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen Fluss im Netzwerk $N - u$ (d.h. der Knoten u wird aus N entfernt) der Größe mindestens $|f| - f(u)$ berechnet.

Aufgabe 26 ***mündlich***

Weisen Sie eine möglichst gute untere Laufzeitschranke für den Edmonds-Karp-Algorithmus nach, indem Sie beliebig große Netzwerke angeben, bei deren Eingabe der Algorithmus lange rechnet.

Aufgabe 27 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***



(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Edmonds-Karp einen maximalen Fluss für N.

(b) Wie viele blockierende Flüsse berechnet der Algorithmus von Dinic bei Eingabe N. Geben Sie diese an.

(c) Geben Sie einen Schnitt S mit minimaler Kapazität für N an.

(d) Passen Sie die Fragestellungen in (a) bis (c) an den Fall an, dass die vorgegebenen Kantenbeschriftungen als untere Schranken für den gesuchten Fluss interpretiert werden. Welche Lösungen ergeben sich in (a) bis (c) für diesen Fall?