# Übungsblatt 1

***Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 25. April 2013***

**Aufgabe 1** ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der ein maximales Matching für einen gegebenen Baum bestimmt.

**Aufgabe 2** ***mündlich***

Welche Laufzeit hat der Algorithmus von Edmonds bei einem bipartiten Graphen? Lässt sich der Algorithmus in diesem Fall vereinfachen?

**Aufgabe 3** ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass in einem bipartiten Graphen die maximale Größe eines Matchings gleich der minimalen Größe einer Knotenüberdeckung (engl. vertex cover) ist (Satz von König).

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass in einem bipartiten Graphen zu jedem OSC (odd set cover) eine Knotenüberdeckung mit derselben Kapazität existiert.

(b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der aus einem maximalen Matching in einem bipartiten Graphen eine minimale Knotenüberdeckung berechnet.

(c) Beweisen Sie den Heiratssatz: Ein bipartiter Graph besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $\|N(A)\| \geq \|A\|$ für jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt. (*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von König.)

**Aufgabe 4** ***mündlich***

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt $k$-*faktorisierbar*, wenn sich seine Kantenmenge so in $l \geq 0$ Teilmengen $E = E_1 \cup \cdots \cup E_l$ partitionieren lässt, dass die Graphen $G_i = (V, E_i)$ für $i = 1, \ldots, l$ $k$-regulär sind (d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat in $G_i$ den Grad $k$). Zeigen Sie, dass jeder reguläre bipartite Graph 1-faktorisierbar ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie den Heiratssatz.)

**Aufgabe 5** ***mündlich***

Wie groß ist die Anzahl $\alpha(n)$ aller Matchings und die Anzahl $\beta(n)$ aller maximalen Matchings im vollständigen Graphen $K_n$ mit $n$ Knoten?

**Aufgabe 6** ***10 Punkte***

Für ein Matching $M$ in einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $\mathit{free}(M) = n - 2\|M\|$ die Anzahl der freien Knoten bzgl. $M$. Für eine Teilmenge $A \subseteq V$ bezeichne $\mathit{odd}(G - A)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - A$ mit einer ungeraden Knotenzahl. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Matching $M$ in $G$ und jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $\mathit{free}(M) \geq \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$.

(b) Ein Matching $M$ ist genau dann maximal, wenn es eine Teilmenge $A \subseteq V$ mit $\mathit{free}(M) = \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$ gibt. Wir nennen eine solche Menge $A$ ein *Zertifikat* für (die Optimalität von) $M$. (*Hinweis:* Konstruieren Sie $A$ mithilfe eines OSC der Kapazität $\|M\|$.)

(c) Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er nicht nur ein maximales Matching $M$, sondern auch ein Zertifikat für $M$ ausgibt. Wie verarbeitet Ihr Algorithmus die Eingabe $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, 12\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 12\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{7, 11\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\}$?

(d) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Mengen $M \subseteq E$, $A \subseteq V$ überprüft, ob $A$ ein Zertifikat für das maximale Matching $M$ ist.