

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *mündlich*
Sei $f: \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^k$ wie folgt definiert (dabei identifizieren wir $\{0, 1\}^k$ mit \mathbb{Z}_{2^k})

$$f(x) = x^2 + ax + b \pmod{2^k}$$

Zeigen Sie, dass f nicht schwach kollisionsresistent ist.

Aufgabe 2 *mündlich*
Sei $k > l$ und seien $a_i \in \mathbb{Z}_{2^l}$ für $i = 0, \dots, d$ mit $a_d \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \pmod{2^l}$$

definierte Funktion $f: \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^k$ nicht schwach kollisionsresistent ist.

Aufgabe 3 *mündlich*
Sei $f: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^m$ eine Einwegpermutation. Zeigen Sie, dass die durch

$$h(x_1 x_2) = f(x_1 \oplus x_2), \quad x_1, x_2 \in \{0, 1\}^m$$

definierte Funktion $h: \{0, 1\}^{2m} \rightarrow \{0, 1\}^m$ nicht schwach kollisionsresistent ist.

Aufgabe 4 *mündlich*
Seien $h_i: X \rightarrow Y_i$ (n, m_i)-Hashfunktionen (für $i = 1, 2$), von denen mindestens eine kollisionsresistent ist. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$h(x) = h_1(x)h_2(x)$$

kollisionsresistent ist.

Aufgabe 5 *mündlich*
Sei $h_1: \{0, 1\}^{2m} \rightarrow \{0, 1\}^m$ kollisionsresistent. Zeigen Sie, dass dann auch die durch

$$h_i(x_1 x_2) = h_1(h_{i-1}(x_1)h_{i-1}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \{0, 1\}^{2^{i-1}m}$$

induktiv definierten Hashfunktionen h_i ($i \geq 2$) kollisionsresistent sind.

Aufgabe 6 *mündlich*
Sei $n = pq$ für zwei Primzahlen $p > q$. Betrachten Sie die Funktion

$$h(x) = x^2 \pmod{n}, \quad x \in \mathbb{Z}_n^*$$

Welche Eigenschaften (Einweg-Hashfunktion, (schwache) Kollisionsresistenz) hat h , falls n nur mit sehr hohem Aufwand faktorisiert werden kann?

Aufgabe 7 *mündlich*
Für eine (n, m) -Hashfunktion $h: X \rightarrow Y$ und für $y \in Y$ sei

$$h^{-1}(y) = \{x \in X \mid h(x) = y\}$$

die Menge aller Texte mit Hashwert y .

(a) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert \bar{s} der Zufallsvariablen $S_y = \|h^{-1}(y)\|$ im ZOM.

(b) Zeigen Sie:

$$\sum_{y \in Y} (S_y - \bar{s})^2 = 2S + n - \frac{n^2}{m},$$

wobei S die Anzahl $\left\| \left\{ \{x, x'\} \in \binom{X}{2} \mid h(x) = h(x') \right\} \right\|$ aller Kollisionspaare von h bestimmt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{m} - n \right)$$

ist, wobei Gleichheit nur im Fall $S_y = \frac{n}{m}$ für alle $y \in Y$ eintritt.

Aufgabe 8 **10 Punkte**
Sei $h: X \rightarrow Y$ eine beliebige, aber feste (n, m) -Hashfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass für zufällig unter Gleichverteilung aus X gewählte Texte x_1, x_2

$$\Pr[h(x_1) = h(x_2)] \geq \frac{1}{m}$$

ist, wobei Gleichheit nur im Fall $S_y = \|h^{-1}(y)\| = \frac{n}{m}$ für alle $y \in Y$ eintritt.

(b) Bestimmen Sie für einen gegebenen Hashwert y die Erfolgswahrscheinlichkeit $\epsilon(h, y, q)$ von $\text{FINDPREIMAGE}(h, y, q)$, falls für X_0 eine zufällige Teilmenge von X der Größe q gewählt wird.

(c) Berechnen Sie die durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit $\epsilon(h, q)$ von $\text{FINDPREIMAGE}(h, y, q)$, falls X_0 wie in (b) und y zufällig aus Y gewählt werden.

(d) Bestimmen Sie $\epsilon(h, 1)$.