

## Probeklausur

### Besprechung in den Übungen

**Aufgabe 1** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. **20 Punkte**  
 (a)  $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$  (b)  $\binom{n}{O(1)} = n^{O(1)}$  (c)  $\binom{n}{\Omega(1)} = n^{\Omega(1)}$  (d)  $o(1) = O(1/n)$ .

**Aufgabe 2** **32 Punkte**  
 Gegeben seien das Muster  $y = \text{tatütata}$  und der Text  $x = \text{tatatütatatü}$ .  
 (a) Konstruieren Sie den DFA  $M_y$ .  
 (b) Geben Sie das Ablaufprotokoll von  $\text{DFA-String-Matcher}(x, y)$  an.  
 (c) Geben Sie das Ablaufprotokoll von  $\text{KMP-Prefix}(y)$  und die Präfixfunktion  $\pi$  an.  
 (d) Geben Sie das Ablaufprotokoll von  $\text{KMP-String-Matcher}(x, y)$  an.

**Aufgabe 3** **10 Punkte**  
 Geben Sie den Rekursionsbaum von  $\text{MergeSort}$  für das Eingabefeld  $A[1, \dots, 8] = (3, 1, 5, 2, 6, 4, 7, 8)$  an. Notieren Sie dabei für jeden Aufruf  $\text{MergeSort}(A, l, r)$  von  $\text{MergeSort}$  das Teilfeld  $A[l \dots r]$  zu Beginn und nach Beendigung dieses Aufrufs.

**Aufgabe 4** **24 Punkte**  
 Gegeben sind  $n$  Schrauben der Größe  $a_1, \dots, a_n$  und  $n$  dazu passende Muttern der Größe  $b_1, \dots, b_n$ , d.h. es gibt eine Permutation  $\pi$  auf  $\{1, \dots, n\}$  mit  $a_i = b_{\pi(i)}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wir nehmen an, dass nur Vergleiche  $(a_i, b_j)$  zwischen Schrauben und Muttern möglich sind und dass die Antwort  $a_i < b_j$  oder  $a_i = b_j$  oder  $a_i > b_j$  ist.  
 (a) Wie viele Vergleiche sind im besten und im schlechtesten Fall jeweils nötig, um ein Paar  $(i, j)$  mit  $a_i = b_j$  zu finden? Begründen Sie.  
 (b) Geben Sie einen Algorithmus an, der für jede Schraube eine passende Mutter mit durchschnittlich  $O(n \log n)$  Vergleichen findet.  
*Hinweis:* Passen Sie  $\text{QuickSort}$  an diese Aufgabenstellung an.  
 (c) Zeigen Sie, dass hierfür im schlechtesten Fall  $\Omega(n \log n)$  Vergleiche nötig sind.

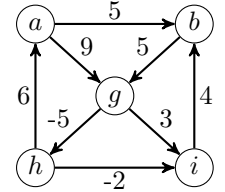
**Aufgabe 5** **22 Punkte**  
 Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $c$  Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie:  
 (a) Wenn  $G$  ein Wald ist, dann ist  $c = n - m$ .  
 (b) Wenn  $c = n - m$  ist, dann ist  $G$  ein Wald.  
 (c)  $n - c \leq m \leq \binom{n-c+1}{2}$ .

*Hinweis:*  $G$  ist genau dann ein Baum, wenn  $m = n - 1$  und  $c = 1$  ist.

**Aufgabe 6** Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. **12 Punkte**  
 (a) Ein azyklischer Digraph hat höchstens eine Wurzel.  
 (b) Ein azyklischer Digraph mit  $n$  Knoten und  $n - 1$  Kanten ist ein gerichteter Baum.  
 (c) Ein azyklischer Graph mit  $n$  Knoten und  $n - 1$  Kanten ist ein Baum.

**Aufgabe 7** **30 Punkte**

Gegeben sei nebenstehender Digraph  $G$  mit Kostenfunktion  $\ell$ .



(a) Bestimmen Sie mit dem Bellman-Ford-Moore-Algorithmus kürzeste Wege von  $a$  zu allen anderen Knoten.  
 (b) Bestimmen Sie mit dem Floyd-Warshall-Algorithmus kürzeste Wege zwischen allen Knoten.

**Aufgabe 8** **20 Punkte**  
 Zur Berechnung der transitiven Hülle eines als Adjazenzmatrix  $A$  gegebenen Digraphen wurde folgender Algorithmus vorgeschlagen:

**Prozedur Finde-Wege**( $A[1 \dots n, 1 \dots n]$ )

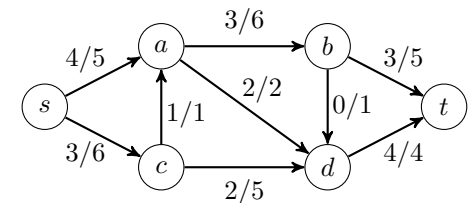
```

1  for i := 1 to n do
2      for k := 1 to n do
3          if A[i, k] = 1 then
4              for j := 1 to n do
5                  if A[k, j] = 1 then A[i, j] := 1
    
```

(a) Bestimmen Sie die asymptotische Laufzeit im besten und im schlechtesten Fall.  
 (b) Zeigen Sie, dass die Prozedur zwar alle Wege der Länge 2, aber nicht alle Wege der Länge 3 findet.  
 (c) Modifizieren Sie die Prozedur so, dass sie alle Wege der Länge  $\geq 1$  in Zeit  $O(n^3)$  findet. (*Hinweis:* Orientieren Sie sich an dem Floyd-Warshall-Algorithmus.)

**Aufgabe 9** **20 Punkte**

(a) Bestimmen Sie mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus ausgehend von nebenstehendem Fluss  $f$  einen maximalen Fluss  $f^*$  von  $s$  nach  $t$ . Geben Sie insbesondere für jeden Schleifendurchlauf das Restnetzwerk und den Zunahmepfad an.



(b) Geben Sie einen Schnitt  $S$  minimaler Kapazität an (mit Begründung).

Als Bearbeitungszeit sind 190 min (also 1 min pro Punkt) vorgesehen.