# Übungsblatt 3

**Aufgabe 10** ***mündlich***

Sei $B$ eine Basis mit beschränktem Fan-In und sei $C = (V, E, \alpha, \beta, \omega)$ ein Schaltkreis über $B$ der Größe $\Omega(n)$ mit einem Ausgabegatter. Zeigen Sie, dass $|E| = \Theta(|V|)$. Das heißt, um die Größe von $C$ zu berechnen genügt es, $|E|$ zu ermitteln. Was kann über den Fall einer Basis mit unbeschränktem Fan-In gesagt werden? Was kann über den Fall mehrerer Ausgabegatter gesagt werden?

**Aufgabe 11** ***mündlich***

Für eine Menge $A \subseteq \{0,1\}^*$ sei $[A]_{\equiv_{cd}} = \{B \subseteq \{0,1\}^* \mid B \equiv_{cd} A\}$. Sei $\mathbf{D} = \{[A]_{\equiv_{cd}} \mid A \subseteq \{0,1\}^*\}$ die Menge der **cd-Grade**. Für $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$ definiere $\mathbf{d_1} \leq \mathbf{d_2}$, falls $A_1 \in \mathbf{d_1}$ und $A_2 \in \mathbf{d_2}$ existieren mit $A_1 \leq_{cd} A_2$. Zeigen Sie:

(a) $\leq$ ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf $\mathbf{D}$, in der jedes Paar von Elementen eine kleinste obere Schranke besitzt (d.h. $(\mathbf{D}, \leq)$ ist ein *oberer Halbverband*).

(b) Die kleinste obere Schranke von $[A]_{\equiv_{cd}}$ und $[B]_{\equiv_{cd}}$ ist die Menge $[A \oplus B]_{\equiv_{cd}}$, wobei $A \oplus B$ die markierte Vereinigung $A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}$ ist.

**Aufgabe 12** ***mündlich***

Betrachten Sie folgende Funktion DIV:

*Eingabe*: zwei Binärzahlen $a$ und $b$ der Länge $n$
*Ausgabe*: die Binärzahl mit dem Wert $\lceil \frac{a}{b} \rceil$

Zeigen Sie DIV $\in \mathsf{TC}^0$.

*Hinweis:* Reduzieren Sie DIV auf die Berechnung von polynomiell vielen Bits der Binärdarstellung von $1/b$ und benutzen Sie die Gleichheit $1/z = \sum_{i \geq 0} (1-z)^i$, um die Berechnung von $1/z$ für $1/2 \leq z \leq 1$ auf ITMULT zu reduzieren.

**Aufgabe 13** ***10 Punkte***

Betrachten Sie die Funktion $\mathrm{MOD}_m$ mit

$$\mathrm{MOD}_m(a_{n-1} \cdots a_0) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=0}^{n-1} a_i \equiv_m 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $m > 1$ gilt: $\mathrm{MOD}_m \leq_{cd} \mathrm{MAJ}$.