

Die Varianz (Streuung)

Definition

Ang., die betrachteten Erwartungswerte existieren.

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$$

heißt Varianz der Zufallsvariable X .

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

heißt Standardabweichung der Zufallsvariablen X .

Bez.: $\text{var}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\text{var}X$, σ^2 , σ_X^2 , σ , σ_X .

Sei $\mu = \mathbf{E}X$.

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Die Varianz

Stetige und diskrete Zufallsvariablen

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Wenn X diskret, so gilt:

$$\text{var}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Wenn X stetig, so gilt:

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

wobei f die Dichte von X ist.

$\text{var}(X)$: mittlere quadratische Abweichung von X und EX .

Die Varianz

Eigenschaften der Varianz

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X - \mu)^2 = \\ &= \mathbf{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \\ &= \mathbf{E}X^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

Beschreibende

Die Varianz

Eigenschaften der Varianz

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

$$\begin{aligned} \mathit{var}(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X - \mu)^2 = \\ &= \mathbf{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \\ &= \mathbf{E}X^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

$$\mathit{var}(aX + b) = a^2 \mathit{var}(X), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Beschreibende

Die Varianz

Eigenschaften der Varianz

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X - \mu)^2 = \\ &= \mathbf{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \\ &= \mathbf{E}X^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{var}(X) = 0 \iff \exists c : P(X = c) = 1.$$

Die Varianz

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}$.

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Die Varianz

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}$.

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

X und Y sind also unabhängig gdw. die Ereignisse $X \leq x$ und $Y \leq y$ unabhängig sind für alle $x, y \in \mathbf{R}$.

Die Varianz

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}$.

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

X und Y sind also unabhängig gdw. die Ereignisse $X \leq x$ und $Y \leq y$ unabhängig sind für alle $x, y \in \mathbf{R}$.

Seien X und Y unabhängig. Dann gilt

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y).$$

Die Varianz

Poisson-Verteilung

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (i - \lambda)^2 p_i \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i - 1) p_i + \sum_{i=0}^{\infty} i p_i - \\ &\quad 2\lambda \sum_{i=0}^{\infty} i p_i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} p_i \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Die Varianz

Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\text{var}(X) = np(1 - p).$$

(ohne Beweis, ÜA)

Beschreibende

Die Varianz

Gleichverteilung auf (a, b)

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{EX} = \frac{a+b}{2}.$$

Beschreibende

Die Varianz

Gleichverteilung auf (a, b)

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{EX} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{EX}^2 &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbf{EX}^2 - (\mathbf{EX})^2 \\ &= \frac{1}{12} (4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 \\ &\quad - 6ab - 3b^2) \\ &= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Die Varianz

Exponentialverteilung

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{EX} = \lambda.$$

$$\mathbf{EX}^2 = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = 2 \cdot \lambda^2 \quad (\text{ÜA}).$$

$$\mathbf{var}(X) = \lambda^2.$$

Beschreibende

Die Varianz

Normalverteilung $\text{var}(X) = \sigma^2$

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ \mathbf{E}(X - \mu)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (-t) \left(-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-1) e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2. \end{aligned}$$

Normalverteilung

Besondere Eigenschaften

(schwaches) Gesetz der Großen Zahlen

Seien X_i unabhängig, identisch verteilt, $EX_i = \mu$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow_p \mathbf{EX}$$

Zentraler Grenzwertsatz

Seien X_i unabhängig, identisch verteilt,
 $EX_i = \mu$, $varX_i = \sigma^2$.

$$Z_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \rightarrow Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

Descr_Binomial_2.sas Descr_Exp.sas

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Fehler sind unter folgenden Annahmen
(asymptotisch) normalverteilt:

- Jeder Fehler ist Summe einer sehr großen Anzahl sehr kleiner, gleich großer Fehler, die verschiedene Ursachen haben.
- Die verschiedenen Fehlerkomponenten sind unabhängig.
- Jede Fehlerkomponente ist mit Wkt. 0.5 positiv und mit Wkt. 0.5 negativ.

Normalverteilung

Maximale Entropie

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

bei gegebenen

Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

f : Wkt.dichte auf $(-\infty, \infty)$.

$$\int xf(x) dx = \mu, \quad \int (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

Entropie:

$$H(f) := - \int f(x) \log f(x) dx$$

ist zu maximieren unter den obigen Bedingungen.

$\implies f = \text{Normaldichte.}$

Literatur: Rao: Lineare Statistische Methoden, 3.a.1.

Normalverteilung

Die Summe normalverteilter Zufallsvariablen

Werkzeuge der
empirischen
Forschung

W. Kössler

Einleitung

Datenbehandlung

Syntax

Tastatur

Transformationen

Externes File

Input-Anweisung

SAS-Files

Zusammenfügen

Output-Anweisung

DO-Schleifen

Wkt.rechnung

Population

Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen

Normalverteilung (1)

Erwartungswert

Varianz

Normalverteilung (2)

Beschreibende

Die Summe normalverteilter Zufallsvariablen ist normalverteilt.

Seien $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dann

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho).$$

(ρ : Korrelationskoeffizient zwischen X_1 und X_2 , s.u.)

Beweis: über charakteristische Funktionen
(Fouriertransformationen der Dichte) oder über die
Faltungsformel (Stochastik-Vorlesung).