Einstichprobenproblem
t-Test

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_A : \mu > \mu_0$
$\Rightarrow$ große Werte von

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

indizieren Gültigkeit von H_A.

b) $H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$
$\Rightarrow$ kleine Werte von T indizieren H_A

c) $H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu \neq \mu_0$
$\Rightarrow$ $|T|$ groß indiziert Gültigkeit von H_A.

Hypothesentest
Annahme- und Ablehnungsbereich

a) $H_0: \quad \mu \leq \mu_0 \qquad H_A: \mu > \mu_0$

große Werte von T sprechen für H_A.

Annahmebereich Krit.Bereich

t_{krit}

b) $H_0 \quad \mu \geq \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$

kleine Werte von T sprechen für H_A.

Krit.B. Annahmebereich

t_{krit}

c) $H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu \neq \mu_0$

große Werte von $|T|$ sprechen für H_A.

Annahmebereich

$-t_{krit}$ t_{krit}

Hypothesentest

Sei jetzt t eine Realisierung von T.

Zweiseitige Alternative $H_A : \mu \neq \mu_0$

Wenn $|t| > t_{krit} = t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ so H_0 abgelehnt.

Wenn $|t| \leq t_{krit} = t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ so H_0 nicht abgel.

Abl. Annahme Ablehnung

$-t_{krit}$ 0 t t_{krit}

Einseitige Alternative $H_A : \mu > \mu_0$

Wenn $t > t_{krit} = t_{1-\alpha,n-1}$ so H_0 abgelehnt.

Wenn $t \leq t_{krit} = t_{1-\alpha,n-1}$ so H_0 nicht abgel.

Annahme Ablehnung

0 t t_{krit}

Einseitige Alternative: $H_A : \mu < \mu_0$

Wenn $t < t_{krit} = t_{\alpha,n-1}$ so H_0 abgelehnt.

Wenn $t \geq t_{krit} = t_{\alpha,n-1}$ so H_0 nicht abgel.

Ablehnung Annahme

t_{krit} 0 t

p-Werte bei einseitigen Alternativen

Erinnerung: Der zweiseitige p-Wert ist: $P(|T| > t)$.

$$\begin{aligned}
P(|T| > t) &= P((T > t) \vee (-T > t)) \\
&= P((T > t) \vee (T < -t)) \\
&= 2 \cdot P(T > t), \qquad t > 0 \\
P(T > t) &= P(T < -t) \\
&= 1 - P(T \geq -t) \\
&= 1 - \frac{1}{2} P(|T| > -t), \qquad t \leq 0
\end{aligned}$$

(Die Verteilung von T ist stetig und symmetrisch.)

p-Werte bei einseitigen Alternativen

Fall a) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_a : \mu > \mu_0$

$$\text{p-Wert} = P(T > t) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(|T| > t), & \text{falls } t > 0 \\ 1 - \frac{1}{2}P(|T| > -t), & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

Ablehnung von H_0 falls $P(T > t) < \alpha$.
Die p-Werte von SAS sind zweiseitig, sie sind also (wenn $t > 0$) durch 2 zu dividieren
(wenn $t \leq 0$ wird H_0 ohnehin nicht abgelehnt)

p-Werte bei einseitigen Alternativen

Fall b) $H_0 : \quad \mu \geq \mu_0 \qquad H_a : \mu < \mu_0$

$$\text{p-Wert} = P(T < t) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(|T| > |t|), & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}P(|T| > -t), & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Ablehnung von H_0 falls $P(T < t) < \alpha$
also wenn $t < 0$ so SAS-p-Wert durch 2 teilen!

Im Fall der zweiseitigen Alternative (c) ist der p-Wert $P(|T| > t)$ genau das was SAS ausgibt, wir brauchen also nichts zu ändern.

Zusammenfassung Einstichprobenproblem (1)

Teststatistik

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \qquad \text{Realisierung } t$$

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X})^2$

Zweiseitige Alternative, $H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu \neq \mu_0$

$|t| > t_{krit} \quad \Leftrightarrow \quad H_0$ ablehnen
p-value $< \alpha \quad \Leftrightarrow \quad H_0$ ablehnen
"Pr $> |t|$" $< \alpha \quad \Rightarrow \quad H_0$ ablehnen

Zusammenfassung Einstichprobenproblem (2)

Einseitige Alternative, $H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_A : \mu > \mu_0$

$t > 0$ und $\frac{\text{p-value}}{2} < \alpha \Leftrightarrow H_0$ ablehnen

Einseitige Alternative, $H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad H_a : \mu < \mu_0$

$t < 0$ und $\frac{\text{p-value}}{2} < \alpha \Leftrightarrow H_0$ ablehnen

Konfidenzbereiche

am Beispiel des t-Tests

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$ wenn μ der wahre (Lokations-) Parameter ist. $\Rightarrow$

$$P(\underbrace{-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}-\mu}{s} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}_{(*)}) = 1-\alpha$$

Die Ungleichungenen sind äuqivalent zu

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\leftrightarrow \quad -\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \overline{X}-\mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \\
&\leftrightarrow \quad -\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq -\mu \leq -\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \\
&\leftrightarrow \quad \overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \geq \mu \geq \overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \\
&\leftrightarrow \quad \overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \mu \leq \overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}
\end{aligned}$$

Konfidenzbereiche

$(1-\alpha)$ Konfidenzintervall für den (unbekannten) Parameter μ

$$\left[\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right]$$

PROC TTEST ALPHA=Wert
PROC UNIVARIATE ALPHA=Wert CIBASIC
ALPHA: Konfidenzniveau (=Signifikanzniveau)

CIBASIC: Konfidenzintervalle für μ, σ^2, σ basierend auf Normalverteilung

CIPCTLDF: verteilungsfreie Konfidenzintervalle (basierend auf empirischen Quantilen)

Konfidenzbereiche
Beispiel

`Test_t1_Banknote`

Konfidenzintervalle für den Lageparameter
$\mu = \mathbf{E}$'laenge':

	echt		gefälscht	
$\alpha = 0.01$	214.87	215.07	214.73	214.92
$\alpha = 0.05$	214.89	215.05	214.75	214.89
$\alpha = 0.05$ nichtparam. KI (für Median)	214.9	215.1	214.7	214.9

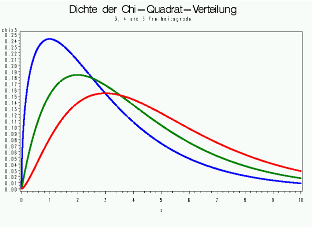
PROC TTEST ALPHA=Wert
PROC UNIVARIATE ALPHA=Wert CIBASIC CIPCTLDF

Konfidenzintervalle für σ^2

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Dichte einer χ^2_ν-Verteilung

$$f_{\chi^2_\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-x/2} x^{\nu/2-1} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



`Test_Chi2_Dichte`

Konfidenzintervall für σ^2

$$P\Big(\chi^2_{\alpha/2,n-1} \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\Big) = 1-\alpha$$

auflösen nach σ^2:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\Big(\chi^2_{\alpha/2,n-1} \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\Big) \\
&= P\Big(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\Big) \\
&= P\Big(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\Big)
\end{aligned}$$

Konfidenzintervall für σ^2

Konfidenzintervall

(Vertrauensintervall) für den (unbekannten) Parameter σ^2

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right]$$

PROC TTEST PROC UNIVARIATE ALPHA CIBASIC CIPCTLDF