Institut für Informatik
Theoretische Informatik 3
Prof. Dr. Johannes Köbler

Sommersemester 2008
9. Juli 2008

Probeklausur (Besprechung in den Übungen)

Aufgabe 1 ***20 Punkte***

Sei f eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) $f(n) = n^{\mathcal{O}(1)}$ gilt genau dann, wenn es Polynome p und q gibt mit $p(n) \leq f(n) \leq q(n)$ (d.h. $n^{\mathcal{O}(1)}$ charakterisiert polynomielles Wachstum).

(b) $n^{\log(n)} = n^{\omega(1)}$ (d.h. $n^{\log(n)}$ wächst schneller als jedes Polynom).

(c) Falls f die Rekursionsgleichung $f(n) = 2f(n/4) + f(n/2) + n + 4$ erfüllt, dann gilt $f(n) = \Theta(n \log(n^5))$.

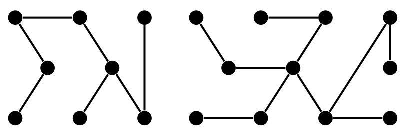
(d) $\mathcal{O}(n) \neq \Theta(1) \cup \Theta(n)$.

Aufgabe 2 ***10 Punkte***

Führen Sie den Algorithmus `KMP-Prefix` für das Muster `abcabdabcabcabc` aus. Geben Sie das Ablaufprotokoll und die berechnete Präfixfunktion π an.

Aufgabe 3 ***30 Punkte***

Die *Exzentrizität* $ex(v)$ eines Knotens v in einem Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Distanz von v zu einem Knoten u in G, d.h.



$$ex(v) = \max\{d(v, u) \mid u \in V\},$$

wobei $d(v, u)$ die Distanz von v zu u, also die Länge eines kürzesten v-u-Weges bezeichnet. Das *Zentrum* eines Graphen besteht aus allen Knoten mit minimaler Exzentrizität.

(a) Bestimmen Sie für die beiden oben abgebildeten Bäume die Exzentrizität aller Knoten und geben Sie jeweils das Zentrum an.

(b) Von welchem Typ (Blatt oder innerer Knoten) sind die Knoten eines Baumes, die die größte Exzentrizität besitzen? Geben Sie eine Begründung an.

(c) Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Baumes entweder aus einem oder aus zwei benachbarten Knoten besteht.

(d) Beschreiben Sie (informal) einen effizienten Algorithmus, mit dem man das Zentrum eines Baumes bestimmen kann und schätzen Sie dessen Laufzeit ab.

Aufgabe 4 ***10 Punkte***

Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe mit mindestens zwei Personen immer mindestens zwei gibt, die die gleiche Anzahl von Freunden (innerhalb der Gruppe) haben.

Aufgabe 5 ***25 Punkte***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Falls G ein Baum mit mindestens 2 Knoten ist, hat G mindestens 2 Blätter.

(b) Falls der Minimalgrad $\delta(G) \geq 2$ ist, dann besitzt G einen Kreis.

(c) Falls $\delta(G) \geq 2$ ist, dann liegen alle Knoten auf einem Kreis.

(d) Ein gerichteter Baum mit mindestens 2 Knoten hat mindestens 2 Blätter.

Aufgabe 6 ***20 Punkte***

(a) Sei $V = \{1, 2, ..., n\}$. Wieviele Kanten hat ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, wenn von jedem Knoten genau eine Kante wegführt?

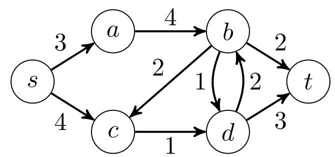
(b) Wieviele verschiedene solche Graphen gibt es? Zeichnen Sie diese Graphen für $n = 2$.

(c) Wie ändert sich die Anzahl, wenn zusätzlich gefordert wird, dass jeder Knoten Eingangsgrad eins hat? Zeichnen Sie diese Graphen für $n = 3$.

(d) Wieviele gerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit $d_{out}(v) = k$ für alle Knoten $v \in V$ gibt es?

Aufgabe 7 ***30 Punkte***

Gegeben ist nebenstehendes Netzwerk N.



(a) Bestimmen Sie mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus einen maximalen Fluss f für N.

(b) Berechnen Sie die Kapazität des Schnittes $S = \{s, a, b, c\}$.

(c) Hat der Schnitt S minimale Kapazität? Begründen Sie.

Aufgabe 8 ***10 Punkte***

Zeigen Sie, dass sich die drei Operationen `Init`, `Insert` und `RemoveMin` einer vergleichsbasierten Prioritätswarteschlange nicht alle in konstanter Zeit implementieren lassen.

Aufgabe 9 ***10 Punkte***

Geben Sie eine Prozedur `Tree` an, die für einen als Feld von Adjazenzlisten gegebenen Graphen G in Zeit $O(\|V\|)$ testet, ob G ein Baum ist.

Aufgabe 10 ***15 Punkte***

Geben Sie die Folge der 8 AVL-Bäume an, die bei der Einfügesequenz 12, 25, 8, 35, 19, 20, 22, 24 entstehen.

Hinweis: Als Bearbeitungszeit sind 180 min (also 1 min pro Punkt) vorgesehen.