Sei X stetig auf (a,b), wobei a, b unendlich sein können, $a \leq x_0 < x_1 \leq b$

$P(X = x_0) = 0, \quad P(x_0 < X < x_1) > 0$ (wenn $f > 0$).

Die Funktion f heißt Dichtefunktion (von X) falls:

1. $f(x) \geq 0, \quad a < x < b$.
2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 1$.

Die stetige Zufallsvariable X wird also durch seine Dichtefunktion beschrieben.

$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Die Dichtefunktion hängt i.A. von unbekannten Parametern ab, die geschätzt werden müssen.

Beispiele
Gleich- und Exponentialverteilung

Gleichverteilung auf [a,b], $X \sim R(a,b)$, $a < b$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Referenzverteilung - Zufallszahlen

Beispiele

Gleich- und Exponentialverteilung

Gleichverteilung auf [a,b], $X \sim R(a,b)$, $a < b$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Referenzverteilung
- Zufallszahlen

Exponentialverteilung, $X \sim Exp(\lambda)$, $(\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{falls } x \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{falls} \quad x > 0. \end{cases}$$

- Lebensdauer
- Zeitdauer zwischen Ankünften

Beispiele

Exponentialverteilung (2)

Gedächtnislosigkeit

Eine Verteilung P (mit Verteilungsfunktion F) heißt gedächtnislos, wenn für alle $s, t \geq 0$, gilt:

$$P(X \geq s+t | X \geq t) = P(X \geq s).$$

Es gilt (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} P(X \geq s+t | X \geq t) &= \frac{P(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq t\})}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)}. \end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit

Cauchy-Funtionalgleichung

Eine Verteilung ist also gedächtnislos, gdw.

$$\frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s)$$

bzw.

$$\frac{1-F(s+t)}{1-F(t)} = 1-F(s).$$

Überlebensfunktion (oder Zuverlässigkeitsfunktion)

$$G(t) = 1 - F(t)$$

Die Vf. F (mit der Überlebensfunktion G) ist also gedächtnislos gdw

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s,t \geq 0$$

Cauchy-Funktionalgleichung

Eine Lösung

Satz: Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos.

Beweis: Die Verteilungsfunktion ist (sei $\lambda' := \frac{1}{\lambda}$)

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda' t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda' t}) = e^{-\lambda' t}.$$

Folglich erhalten wir

$$G(s + t) = e^{-\lambda'(s+t)} = e^{-\lambda' s} e^{-\lambda' t} = G(s) \cdot G(t).$$

Cauchy-Funktionalgleichung
Die einzige Lösung

Satz:

Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit
$F(0) = 0$ und $G(t) = 1 - F(t)$.
Es gelte die Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0.$$

Dann gilt für alle t, $t > 0$,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

wobei $\lambda > 0$. D.h. F ist Exponential-Verteilungsfunktion.

Beweis: Stochastik-Vorlesung.

Beispiele
Normalverteilung (NV)

Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})} \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (2)$$

$(-\infty < x < \infty)$, $\quad -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0.$

Bez.: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
μ: Lageparameter, σ: Skalenparameter
NV: wichtigste Verteilung in der Statistik
warum? $\longrightarrow$ später.

SAS-Anweisungen

PDF('Exponential',x,λ)	Dichtefkt.
CDF('Exponential',x,λ)	Verteilungsfkt.
PDF('Normal',x,μ, σ)	Dichtefunktion
CDF('Normal',x,μ, σ)	Verteilungsfkt.
PROBNORM(x,μ, λ)	
Quantile('Normal',u,μ,σ)	Quantilfkt.
PROBIT(u,μ,σ)	

Stetige Zufallsvariablen

Weitere wichtige Verteilungen

Weibull-Verteilung	CDF('Weibull',x,a,λ)
Gamma-Verteilung	CDF('Gamma',x,a,λ)
χ^2-Verteilung	CDF('Chisq',x,ν, λ)
t-Verteilung	CDF('t',x,ν, δ)
F-Verteilung	CDF('F',x,ν_1, ν_2, δ)

Die drei letzten Verteilungen werden vor allem bei statistischen Tests benötigt(später).

```
Descr_Weibull
Descr_Gamma
```

Wahrscheinlichkeitsverteilungen in SAS

$\hookrightarrow$ help
- $\hookrightarrow$ SAS Help and Documentation
  - $\hookrightarrow$ SAS Products
    - $\hookrightarrow$ BASE SAS
      - $\hookrightarrow$ SAS Language Dictionary
        - $\hookrightarrow$ Dictionary of Language
          - $\hookrightarrow$ Functions and Call Routines
            - $\hookrightarrow$ CDF
            - $\hookrightarrow$ PDF
            - $\hookrightarrow$ Quantile

Wahrscheinlichkeitsverteilungen in SAS

CDF('Verteilung',x,Parameterliste)	Verteilungsfkt.
PDF('Verteilung',x,Parameterliste)	Df (Wkt.fkt.)
SDF ('Verteilung',x,Parameterliste)	= 1-CDF
	Überlebensfunktion $(1 - F(x))$
Quantile('Verteilung',u,Parameterliste)	Quantilfkt.

Verteilung: in der obigen Liste nachsehen (s. letzte Folie)