Nichtparametrische Konfidenzintervalle

Option CIPCTLDF in der PROC UNIVARIATE

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für p-Quantil, d.h. für x_p

Die Verteilung der j-ten Ordnungsstatistik $X_{(j)}$:

$$P(X_{(j)} < x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} F(x)^i (1 - F(x))^{n-i}$$

'Erfolg" gdw. $X_i < x$, "Erfolgswkt." $F(x)$.
Insbesondere, für $x = x_p$ (das wahre p-Quantil)

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} < x_p) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} F(x_p)^i (1 - F(x_p))^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \end{aligned}$$

Nichtparametrische Konfidenzintervalle

Option CIPCTLDF in der PROC UNIVARIATE (2)

$$P(X_{(j)} < x_p) = \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Untere und obere Konfidengrenzen $X_{(l)}$ und $X_{(u)}$ für x_p werden so bestimmt, dass l und u (möglichst) symmetrisch um $\lfloor np \rfloor + 1$ und so dass

$$P(X_{(l)} \leq x_p < X_{(u)}) = \sum_{i=l}^{u-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq 1 - \alpha$$

($X_{(\lfloor np \rfloor)}$ ist Schätzung für x_p.)

5.3 Vergleich zweier abhängiger Gruppen
(verbundene Stichproben)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$
$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

- Gewicht einer Person zu den Zeitpunkten t_1, t_2.
- Banknoten (oben- unten, links - rechts)
- Patient nimmt Medikament 1 und 2
- Kreuz- und selbstbefruchtete Pflanzen

`Test_t2_Banknote` `Test_t2_Darwin`

Folgende Möglichkeiten:

a) Transformation $Z := X_1 - X_2$ und testen auf $\mu = 0$
PROC UNIVARIATE; VAR Z; RUN; oder
PROC TTEST H0=0; VAR Z; RUN;

b) Mit der Prozedur TTEST:

```
PROC TTEST;
   PAIRED X1*X2;
RUN;
```

5.4 Vergleich zweier unabhängiger Gruppen
(unverbundene Stichproben)

$$
\begin{array}{ll}
H_0 : \mu_1 = \mu_2 & H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \\
H_0 : \mu_1 < \mu_2 & H_1 : \mu_1 \geq \mu_2 \\
H_0 : \mu_1 > \mu_2 & H_1 : \mu_1 \leq \mu_2
\end{array}
$$

- Tibetische Schädel (Sikkim - Kham)
- Wasserhärte (Nord - Süd)
- Klinikaufenthalt (Klinik1 - Klinik2)
- Banknoten (echt - gefälscht)

```
Test_t2_Tibetan
Test_t2_Heroin
Test_t2_Banknote
```

Vergleich zweier unabhängiger Gruppen

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Fall 1: Varianzen σ_1^2, σ_2^2 sind gleich
Fall 2: Varianzen σ_1^2, σ_2^2 sind verschieden

Fall 1:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}$$

n, m: Umfänge Stichprobe 1 und 2

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 \quad S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$$

Erläuterung des Quotienten T

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$

$$\overline{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2 \cdot \frac{1}{n}), \quad \overline{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2 \cdot \frac{1}{m})$$

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot S_1^2 \sim \chi^2_{n-1}, \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot S_2^2 \sim \chi^2_{m-1}$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}))$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\left((n-1) \cdot S_1^2 + (m-1) \cdot S_2^2\right) \sim \chi^2_{n+m-2}$$

$$T \sim t_{n+m-2}$$

unter H_0 ($\mu_1 = \mu_2$).

T ist eine Zufallsgröße!

Vergleich zweier unabhängiger Gruppen

T ist eine Zufallsgröße!

Werte von T werden mit gewissen Wktn. angenommen!

Die Wkt. dafür, daß T sehr große Werte annimmt (wenn H_0 richtig ist) ist also sehr klein.

Sei jetzt t eine Realisierung von T (also der Wert, der bei Ausrechnen anhand der gegebenen Daten entsteht).

Wenn jetzt t sehr groß, $|t| \in K$ (krit. Bereich)
(aber die Wkt. dafür ist sehr klein, wenn H_0 richtig ist)
$\Rightarrow H_0$ ablehnen.

Vergleich zweier unabhängiger Gruppen
ungleiche Varianzen

Fall 2: Varianzen ungleich

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

$T \sim t_\nu$ approximativ t. Die Zahl ν der Freiheitsgrade wird auch approximativ berechnet. (Welch-Test, 1937)

SAS bietet Tests für beide Varianten an. Satterthwaite-Approximation (1946).

```
PROC TTEST;
    CLASS Klassifikationsvariable;
    VAR auszuwertende Variable(n);
RUN;
```

Vergleich zweier unabhängiger Gruppen

Welchen Test soll man nehmen?

- Aus Vorinfo. ist vielleicht bekannt, ob man gleiche Varianzen annehmen kann.

- Man kann einen Test auf gleiche Varianzen vorschalten

Problem: 2 stufiger Test

Wird das Signifikanzniveau eingehalten??

Test auf Gleichheit der Varianzen
Voraussetzung: Normalverteilung

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

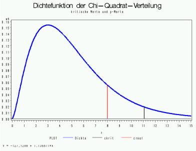
(Fisher-) F- Verteilung mit $(n-1, m-1)$ Freiheitsgraden.

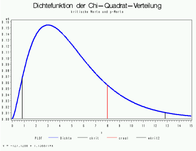
F ist Quotient zweier unabhängiger χ^2-verteilter Zufallsgrößen.
H_0 ablehnen, falls

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2},n-1,m-1} \quad \text{oder} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$$

Test auf Gleichheit der Varianzen

F-Test





$$F_{\frac{\alpha}{2},n-1,m-1} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},m-1,n-1}}$$

(beachten: Freiheitsgrade vertauschen sich)

$\Rightarrow H_0$ ablehnen, falls

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},m-1,n-1}} \quad \text{oder} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2},m-1,n-1} \quad \text{oder} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2},n-1,m-1}$$

Test auf Gleichheit der Varianzen

F-Test, prakt. Durchführung

$s_M^2 := max(s_1^2, s_2^2) \qquad s_m^2 := min(s_1^2, s_2^2)$

n_M, n_m: die entsprechenden Stichprobenumfänge

$\Rightarrow H_0$ ablehnen, falls

$$\frac{s_M^2}{s_m^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_M-1, n_m-1}.$$

Formulierung mit p-Werten

H_0 ablehnen, falls

$$P(W_{n_M-1,n_m-1} > \frac{s_M^2}{s_m^2}) < \frac{\alpha}{2}$$

$W_{n_M-1,n_m-1} \sim F_{n_M-1,n_m-1}$

Ein- und Zweistichprobenproblem

Anmerkungen (1)

- Der F-Test (zum Skalenvergleich) ist sehr empfindlich gegenüber Abweichungen von der Normalverteilungsannahme

$\Rightarrow$ mit größter Vorsicht genießen.

- Der Einstichproben- t-Test ist nicht robust!

- Der Zweistichproben t-Test ist etwas robuster als der t-Test im Einstichprobenproblem

- Ausreißer können extremen Einfluß haben (ÜA).

- Wenn Gleichheit der Varianzen unklar

$\Rightarrow$ t-Test mit ungleichen Varianzen nehmen.
(ist bei gleichen Varianzen nur ganz wenig weniger effizient)

Ein- und Zweistichprobenproblem
Anmerkungen (2)

- Besser nicht auf das Ergebnis des F-Tests verlassen. (Problematik: 2-Stufentest, Nicht-Robustheit).
- Es gibt robustere Skalentests $\Rightarrow$

Levene Test und Brown-Forsythe Test.

Test auf Gleichheit der Varianzen

Levene-Test

Bilden die Werte

$$\begin{aligned} X_j^* &:= |X_j - \overline{X}| \\ Y_j^* &:= |Y_j - \overline{Y}| \end{aligned}$$

Skalenunterschiede in (X, Y) spiegeln sich jetzt in Lageunterschieden in (X^*, Y^*) wieder.
Mit den “neuen Beobachtungen” wird jetzt ein t-Test durchgeführt.
Die t-Verteilung gilt nur approximativ.

Test auf Gleichheit der Varianzen

Brown-Forsythe Test

Analog zum Levene-Test, nur hier bilden wir die Werte

$$\begin{aligned} X_j^* &:= |X_j - \text{med}_i X_i| \\ Y_j^* &:= |Y_j - \text{med}_i Y_i| \end{aligned}$$

Beide Tests sind (einigermaßen) robust gegen Abweichungen von der Normalverteilung.

Test auf Gleichheit der Varianzen

Syntax

```
PROC ANOVA;
   CLASS Klasse;
    MODEL var=Klasse;
    MEANS Klasse /
          HOVTEST=Levene (TYPE=ABS);
    MEANS Klasse / HOVTEST=BF;
RUN;
```

`Test_t2_Banknote`