5.9. Nichtparametrische Tests

Übersicht

Es werden die wichtigsten Rang-Analoga zu den Tests in 5.2.-5.6. behandelt.

5.9.0 Einführung

5.9.1 Einstichprobenproblem (vgl 5.2), 2 verbundene Stichproben (vgl. 5.3)
Vorzeichentest, Vorzeichen-Wilcoxon-Test

5.9.2 Zwei unverbundene Stichproben (vgl. 5.4)
Wilcoxon-Test

5.9.3 Mehrere unabhängige Stichproben (vgl. 5.5)
Kruskal-Wallis-Test

5.9.4 Mehrere verbundene Stichproben (vgl. 5.6)
Friedman-Test

Nichtparametrische Tests
5.9.0 Einführung

Was tun wenn Normalverteilung nicht vorliegt?

Nichtparametrische Tests

- sie verwenden keine Parameterschätzung (wie $\overline{X}, s$)
- sie halten das Signifikanzniveau (α) für jede stetige Verteilung (approx.) ein. α hängt also nicht von der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion ab.
- sie sind relativ effizient. Der Effizienzverlust bei Normalvert. ist in vielen Fällen gering!

Annahme: Verteilungsfunktion ist stetig (wenn nicht anders vermerkt)

Nichtparametrische Tests

5.9.1 Einstichprobenproblem

	Nulhypothese	Alternative
a)	$H_0: \quad \mu \leq \mu_0$	$H_A: \quad \mu > \mu_0$
b)	$H_0: \quad \mu \geq \mu_0$	$H_A: \quad \mu < \mu_0$
c)	$H_0: \quad \mu = \mu_0$	$H_A: \quad \mu \neq \mu_0$

Vorzeichentest

Wie bisher werden die Differenzen $X_i - \mu_0$ gebildet.

$$V_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i - \mu_0 > 0 \\ 0 & \text{falls } X_i - \mu_0 < 0 \end{cases}$$

$$V^+ = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

= # Differenzen mit positivem Vorzeichen

Nichtparametrische Tests
Vorzeichentest (2)

Bem: Der Fall $X_i - \mu_0 = 0$ tritt wegen der Stetigkeit der Vf. nur mit Wkt. 0 auf.
Sollte der Wert $X_i - \mu_0 = 0$ trotzdem vorkommen (Meßungenauigkeit) so wird die entspr. Beobachtung weggelassen und der Stichprobenumfang entsprechend verringert.
(Nachteil: Es werden gerade Beob. weggelassen, die für die Nullhypothese sprechen!)

Es gilt: $V^+ \sim B(n, \frac{1}{2})$

(V^+ = # “Erfolge” bei n Versuchen mit Wkt. je $\frac{1}{2}$).

$\Rightarrow$ krit. Werte können leicht bestimmt werden:

BINV($1-\alpha, n, \frac{1}{2}$) oder
QUANTILE(’Binomial’,$1-\alpha, n, \frac{1}{2}$)

Nichtparametrische Tests
Vorzeichentest (3)

Teststatistik

$$\underline{M} = V^+ - \frac{n}{2} \qquad (= \frac{V^+ - V^-}{2}) \quad (zentrierteStatistik)$$

n^+: Realisierung von V^+
n^-: Realisierung von V^-

Zweiseitiger p-Wert:
$P(|\underline{M}| \geq |n^+ - \frac{n}{2}|) = P(|\underline{M}| \geq \max(n^+, n^-) - \frac{n}{2}$)=(*)

$$\text{denn } |n^+ - \frac{n}{2}| = \begin{cases} n^+ - \frac{n}{2} & n^+ > \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} - n^+ & n^+ < \frac{n}{2} \\ = n^- - \frac{n}{2} & \end{cases}$$

Nichtparametrische Tests
Vorzeichentest (4)

Der p-Wert ist gleich

$$(*) = P\Big(V^+ - \frac{n}{2} \geq \max(n^+, n^-) - \frac{n}{2}\Big) + P\Big(\tfrac{n}{2} - V^+ \geq \max(n^+, n^-) - \tfrac{n}{2}\Big)$$

$$= P\big(V^+ \geq \max(n^+, n^-)\big) + P\big(n - V^+ \geq \max(n^+, n^-)\big)$$

$$= 2 \sum_{j=\max(n^+,n^-)}^{n} \binom{n}{j} (\frac{1}{2})^j (\frac{1}{2})^{n-j}$$

$$= (\frac{1}{2})^{n-1} \sum_{j=\max(n^+,n^-)}^{n} \binom{n}{j}$$

$$= (\frac{1}{2})^{n-1} \sum_{j=0}^{\min(n^+,n^-)} \binom{n}{j}.$$

Nichtparametrische Tests
Vorzeichentest (5)

Die Verteilung von V^+ ist diskret, d.h. es gibt nicht zu jedem α einen entsprechenden kritischen Wert.

Aber: p-Werte gibt es immer, d.h.:

$$\begin{array}{lcl} p < \alpha & \Rightarrow & H_0 \text{ (c) ablehnen} \\ M > 0 \wedge \frac{p}{2} < \alpha & \Rightarrow & H_0 \text{ (b) ablehnen} \\ M < 0 \wedge \frac{p}{2} < \alpha & \Rightarrow & H_0 \text{ (a) ablehnen} \end{array}$$

Der Vorzeichentest ist meist nicht sehr effizient
(Ausnahme: Verteilung=Doppelexponential)
besser ist der Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest

Nichtparametrische Tests

5.9.1.2 Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest

Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest

Bilden zu den “Beobachtungen”

$$D_i = |X_i - \mu_0|$$

die Rangzahlen, d.h. den Rang (den Platz) in der geordneten Stichprobe

$$\underbrace{D_{(1)}}_{\text{Rang 1}} \leq \ldots \qquad \ldots \leq \underbrace{D_{(n)}}_{\text{Rang n}}$$

Sei R_i^+ der Rang von D_i.

$$W_n^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i^+ \cdot V_i$$

Summe der Ränge von D_i für die $X_i - \mu_0 > 0$.

Nichtparametrische Tests
Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest (2)

Erwartungswert und Varianz von W_n^+

$$\mathbf{E}_0 W_n^+ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R_i^+ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{4} \qquad \mathbf{E}V_i = \frac{1}{2}$$

$$\text{var } W_n^+ = \mathbf{E}(W_n^+ - \mathbf{E}W_n^+)^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{24} \quad \text{(ÜA)}$$

Die Berechnung der exakten Verteilung von W_n^+ kann durch Auszählen aller Permutationen erfolgen
($\longrightarrow$ schon für kleinere n größere Rechenzeit!)
Deshalb verwendet man (für mittlere und große n) die asymptotische Verteilung.

Nichtparametrische Tests
Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest (3)

Asymtotische Verteilung

$$W_n^+ \sim \mathcal{N}(EW_n^+, \text{var}W_n^+) \qquad \text{asymptotisch}$$

Große Werte von

$$\frac{|W_n^+ - EW_n^+|}{\sqrt{\text{var } W_n^+}}$$

führen zur Ablehnung von H_0.

Nichtparametrische Tests
Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest (4)

SAS-Implementation (Wilcoxon-Vorzeichen-Test)

$$S = W_n^+ - EW_n^+ = \sum_{i=1}^{n} R_i^+ V_i - \frac{n(n+1)}{4}$$

R_i^+ Rang von $|X_i - \mu_0|$, Summe nur über positive $X_i - \mu_0$

$n \leq 20$: p-Werte aus der exakten Verteilung von S.

$n > 20$: Es wird eine t-Approximation angeboten:

$$t = \frac{S \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n \, \text{Var}\,(S) - S^2}} \sim t_{n-1}$$

Bindungen (= Meßwertwiederholungen): Ränge werden gemittelt.

Sei t_i: $\#$ Bindungen in der i-ten Gruppe.
Korrektur in Var(S):

$$\text{var}(S) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{2}\sum t_i(t_i+1)(t_i-1)$$

Nichtparametrische Tests

Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest (4)

IQ-Werte von Studenten (Wiwi)

99, 131, 118, 112, 128, 136, 120, 107, 134, 122

$H_0 : \mu = \mu_0 = 110 \qquad H_1 : \mu > \mu_0$

x_i	d_i	$\lvert d_i \rvert$	r_i^+	V_i
99	-11	11	5	0
131	21	21	8	1
118	8	8	3	1
112	2	2	1	1
128	18	18	7	1
136	26	26	10	1
120	10	10	4	1
107	-3	3	2	0
134	24	24	9	1
122	12	12	6	1

$d_i = x_i - 110$

Vorzeichentest:

$M = 8 - \frac{10}{2}$

p-Wert(exakt) = 0.1094

Wilcoxon-signed

$W^+ - \mathbf{E}(W^+) =$

$48 - \frac{10 \cdot 11}{4} = 20.5$.

p-Wert=0.0371.

`Test_IQ_Daten`

Nichtparametrische Tests
Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest (5)

- Im Gegensatz zum Vorzeichentest ist der Vorzeichen-Wilcoxon-Test (= signed rank test) sehr effizient, bei NV nur wenig schlechter, bei den meisten Vf. besser als der t-Test.
  $\Rightarrow$ Wenn NV nicht gesichert ist Vorzeichen-Wilcoxon-Test nehmen!
- Der Vorzeichentest und der Wilcoxon-Test sind sogen. Rangtests, da sie nur auf den Rangzahlen der Beobachtungen beruhen.
  Es gibt weitere Rangtests.
- Durchführung der Tests:
  PROC UNIVARIATE MU0=Wert;

Nichtparametrische Tests

Zwei verbundene Stichproben

Bilden $Z := X - Y$ und testen wie beim Einstichprobenproblem, z.B.

$$H_0 : \mu_Z = 0 \qquad\qquad H_1 : \mu_Z \neq 0$$

Banknoten: oben-unten, links-rechts
Darwin: kreuz-selbstbefruchtete Pflanzen (zur Illustration mit Prozedur RANK)

```
PROC UNIVARIATE;
   VAR Z;
RUN;
```

```
Npar_1_Banknote
Npar_1_Darwin
```

Nichtparametrische Tests

Weitere Problemstellungen im Einstichprobenfall

Binärvariablen

Sei X eine 0-1 Variable, d.h.

$$P(X=0)=p, \quad P(X=1)=1-p$$

$H_0: p=p_0$
T: Anzahl der Beobachtungen in Klasse 0.

$H_{1a} \quad p < p_0:$
p-Wert $= P(T \leq t)$ = CDF('Binomial',t, n, p_o)

$H_{1b} \quad p > p_0:$
p-Wert $= P(T \geq t)$

$H_{1c} \quad p \neq p_0:$
p-Wert $= P(T \leq t$ oder $T \geq n-t+1)$

Nichtparametrische Tests
Weitere Problemstellungen im Einstichprobenfall

Binomialtest

Prozedur FREQ, Option Binomial

$$\begin{aligned} \hat{p} &= T/n \\ se(\hat{p}) &= \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = ASE \\ Z &= \frac{\hat{p}-p_0}{se(\hat{p})} \end{aligned}$$

Einseitige p-Werte bei SAS sind

$$\begin{cases} P(Z > z) & \text{falls} \quad z > 0 \\ P(Z < z) & \text{falls} \quad z \leq 0 \end{cases}$$

Nichtparametrische Tests
Binomialtest

```
PROC FREQ;
   TABLES var / BINOMIAL(0.8);
RUN;
```

`Binomialtest_toxaemia.sas`

Konfidenzintervalle:

a) Normalapproximation: $\hat{p} \pm u_{\alpha/2} se(\hat{p})$
b) exakt: Binomialverteilung (CDF('Binomial',....))

Nichtparametrische Tests

Weitere Problemstellungen im Einstichprobenfall

Zum Vergleich, zur Erinnerung und Ergänzung

χ^2-Anpassungstest

Anpassungstest auf diskrete Gleichverteilung:

```
PROC FREQ;
   TABLES var /CHISQ;
RUN;
```

Anpassungstest auf vorgegebene diskrete Verteilung

```
PROC FREQ;
   TABLES var /CHISQ TESTP=(p1, ..., pk);
RUN;
```

Nichtparametrische Konfidenzintervalle

Option CIPCTLDF in der PROC UNIVARIATE

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für p-Quantil, d.h. für x_p

Die Verteilung der j-ten Ordnungsstatistik $X_{(j)}$:

$$P(X_{(j)} < x) = \sum_{i=j+1}^{n} \binom{n}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i}$$

'Erfolg" gdw. $X_i < x$, "Erfolgswkt." $F(x)$.
Insbesondere, für $x = x_p$ (das wahre p-Quantil)

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} < x_p) &= \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} F(x_p)^i (1-F(x_p))^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

Nichtparametrische Konfidenzintervalle

Option CIPCTLDF in der PROC UNIVARIATE (2)

$$P(X_{(j)} < x_p) = \sum_{i=j+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Untere und obere Konfidengrenzen $X_{(l)}$ und $X_{(u)}$ für x_p werden so bestimmt, dass l und u (möglichst) symmetrisch um $\lfloor np \rfloor + 1$ und so dass

$$P(X_{(l)} \leq x_p < X_{(u)}) = \sum_{i=l}^{u-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq 1 - \alpha$$

($X_{(\lfloor np \rfloor)}$ ist Schätzung für x_p.)

PROC UNIVARIATE CIPCTLDF;

Nichtparametrische Tests
5.9.2 Zwei unverbundene Stichproben-Wilcoxon Test

Wir setzen keine Normalverteilung voraus, aber den gleichen Verteilungstyp, insbesondere gleiche Varianzen

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$
$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$$
$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \quad H_1: \mu_1 > \mu_2$$

Wir fassen die Beobachtungen

$X_{11}, ..., X_{1n}, X_{21}, ..., X_{2m}$

zu einer Stichprobe zusammen und bilden die Rangzahlen R_{ij}, $i = 1, 2, j = 1 \ldots n, m$

$$\underbrace{z_{(1)}}_{\text{Rang 1}} \leq ... \leq \underbrace{z_{(n+m)}}_{\text{Rang n+m}}$$

Nichtparametrische Tests

Wilcoxon-Test

Summe der Ränge zur 1. bzw. 2. Stichprobe

$$S_1 = \sum_{j=1}^{m} R_{1j} \qquad S_2 = \sum_{j=1}^{m} R_{2j}$$

Die Erwartungswerte (unter H_0) sind

$$\mathbf{E}_0 S_1 = \frac{n(n+m+1)}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 S_2 = \frac{m(n+m+1)}{2}$$

und die Varianzen

$$\text{var} S_1 = \text{var } S_2 = \frac{n \cdot m(n+m+1)}{12}.$$

Nichtparametrische Tests
Wilcoxon-Test (2)

Die Teststatistik des Wilcoxon-Tests ist

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{varS}} \qquad \text{SAS:} Z = \frac{S - E(S) + 0.5}{\sqrt{varS}}$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{approximativ}$$

(0.5 = Stetigkeitskorrektur)
bei Bindungen: korrigierte (kleinere) Varianz

```
Npar1way_Carnitinfraktion.sas
Npar1way_Banknote.sas
Npar1way_Heroin.sas
Npar1way_Tibetan.sas
```

Nichtparametrische Tests

Wilcoxon-Test (3)

- SAS gibt die Teststatistik (Z) und die ein- und zweiseitigen p-Werte an.

a) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $\qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$\Rightarrow$ two-sided $Pr > |Z| = P(|Z| > Z)$

b) $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $\qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$\Rightarrow$ one-sided $z > 0$

$\rightarrow P(Z > z) = Pr > Z$

c) $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ $\qquad H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$\Rightarrow$ one-sided $z < 0$

$\rightarrow P(Z < z) = Pr < Z$

- SAS bietet die Normalapproximation und die t-Approximation an.

PROC NPAR1WAY WILCOXON; CLASS x; **RUN**;

Nichtparametrische Tests

5.9.2 Zwei unverbundene Stichproben: Kolmogorov-Smirnov Test

Wir machen gar keine Verteilungsannahmen.

$$\begin{array}{llll} H_0: & F_1 = F_2 & H_1: & F_1 \neq F_2 \\ H_0: & F_1 \leq F_2 & H_1: & F_1 > F_2 \\ H_0: & F_1 \geq F_2 & H_1: & F_1 < F_2 \end{array}$$

Kolmogorov-Smirnov Test

$$\begin{aligned} D &= max_i |F_1(x) - F_2(x)| \quad \text{(zweiseitig, EDF)} \\ D^+ &= max_i (F_1(x) - F_2(x)) \quad \text{(einseitig, D)} \\ D^- &= max_i (F_2(x) - F_1(x)) \quad \text{(einseitig, D)} \end{aligned}$$

PROC NPAR1WAY EDF D;

Zweistichprobenproblem

Allgemeine Empfehlungen

- Wenn Normalverteilung, gleiche Varianzen und keine Ausreißer: t-Test
- Wenn Normalverteilung, ungleiche oder unbekannte Varianzen und keine Ausreißer: Welch-Test (t-Test, unpooled, Satterthwaite)
- Wenn “sehr nahe” an Normalverteilung und keine Ausreißer: wie bei Normalverteilung
- keine Normalverteilung, gleiche Varianzen, und etwa gleicher Verteilungstyp (Ausreißer in begrenztem Maße erlaubt): Wilcoxon Test

  oder: Adaptiver Test (von SAS nicht angeboten)
- keine Normalverteilung, Verteilungstypen verschieden, ungleiche Varianzen: K-S Test

  oder: Brunner-Munzel Test (von SAS nicht angeboten)

Nichtparametrische Tests

5.9.3. Mehrere unverbundene Stichproben

Modell:

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim (0, \sigma^2), \quad j = 1, ..., n_i, i = 1, .., k$$

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_k \qquad H_1 : \exists(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}) \;\; \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2}$$

Wir fassen alle Beobachtungen
$X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}$
zusammen und bilden die Rangzahlen R_{ij}, $i = 1...k, j = 1...n_i$.

Mit den Rangzahlen führen wir eine
einfaktorielle Varianzanalyse durch
= Kruskal-Wallis Test

Nichtparametrische Tests

Mehrere unverbundene Stichproben

Kruskal-Wallis Test

$$KW = \frac{\sum_{i=1}^{k}(T_i - E_0(T_i))^2 \cdot n_i}{S^2}, \quad \text{wobei}$$

$$T_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij} \quad \text{mittl. Rangsumme der i-ten Gruppe}$$

Kruskal-Wallis	Varianzanalyse
T_i	$\overline{Y}_{i.}$
$E_0 T_i = \frac{N+1}{2}$	$\overline{Y}_{..} = \overline{Y}$
Zähler	SSB
$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ Gesamtstichprobenumfang	
$S^2 = \frac{(N-1)N(N+1)}{12}$	SST
$= \sum_i \sum_j (R_{ij} - \frac{N+1}{2})^2)$	

Nichtparametrische Tests

Kruskal-Wallis-Test

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \sum_i \sum_j (R_{ij} - \frac{N+1}{2})^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{N} (k - \frac{N+1}{2})^2 \\
&= \sum_k k^2 - (N+1) \sum_k k + \frac{(N+1)^2}{4} \cdot N \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)^2}{2} + \frac{(N+1)^2}{4} \cdot N \\
&= \frac{(N+1)\cdot N}{12} \big(4N + 2 - 6N - 6 + 3N + 3\big) \\
&= \frac{N(N+1)}{12} \cdot (N-1) = \frac{(N-1)\cdot N \cdot (N+1)}{12}.
\end{aligned}
$$

Nichtparametrische Tests
Kruskal-Wallis-Test

Vorteil: S^2 ist nicht zufällig, hängt nur vom Stichprobenumfang ab.

$KW \sim \chi^2_{k-1}$ (asymptotisch)

H_0 ablehnen, falls p-value = ”Pr $>$ Chi Square” $< \alpha$

SAS-Output

Mean Score:	T_i
Chi-Square:	realisierte KW
DF=$k-1$:	Freiheitsgrade.

```
Npar1way_Maschinen.sas
~\Varianzanalyse_Modelle\PI12erg.sas
```

Nichtparametrische Tests

Kruskal-Wallis-Test

- Bei Bindungen erfolgt eine Korrektur der Statistik
- KW-Test ist relativ effizient bei NV. Bei Nicht-NV meist besser als der VA-F-Test.
- KW-Test hält (wie alle nichtparam. Tests) asymptotisch das Signifikanzniveau ein.
- kleine Stichproben ($N \leq 20$): Option EXACT möglich

```
PROC NPAR1WAY WILCOXON;
   CLASS Faktor;
  VAR var;
RUN;
```

Nichtparametrische Tests

5.9.4 Mehrere verbundene Stichproben-Friedman Test

Modell, wie bei der 2-faktoriellen Varianzanalyse

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad \epsilon_{ij} \sim (0, \sigma^2),$$

$$j = 1...k, i = 1...n$$

$H_0 : \beta_1 = ... = \beta_k (= 0) \qquad H_1 : \exists (j_1, j_2) : \beta_{j1} \neq \beta_{j2}$

Ränge werden zeilenweise gebildet, $Y_{1(1)} \leq ... \leq Y_{1(k)}$
R_{ij} der Rang von Y_{ij} in der i-ten Zeile.

Nichtparametrische Tests

Friedman Test

	Behandlung				
Block	1	2	...	k	Zeilensummme
1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1k}	$\frac{k(k+1)}{2}$
.					
.					
n	R_{n1}	R_{n2}	...	R_{nk}	$\frac{k(k+1)}{2}$
	$R_{.1}$	$R_{.2}$	...	$R_{.k}$	$\frac{nk(k+1)}{2}$
	$n\overline{R}_{.1}$	$n\overline{R}_{.2}$	...	$n\overline{R}_{.k}$	

$$F_k = \frac{n^2 \sum_{j=1}^{k} (\overline{R}_{.j} - E(\overline{R}_{.j}))^2}{n \cdot k(k+1)/12}$$

Nichtparametrische Tests

Friedman Test

$$F_k = \frac{n^2 \sum_{j=1}^{k} (\overline{R}_{.j} - E(\overline{R}_{.j}))^2}{n \cdot k(k+1)/12}$$

$\overline{R}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_{ij}$ Spaltenmittel der j-ten Spalte (Vergleiche mit $\overline{Y}_{.j}$)

$E\overline{R}_{.j} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$ (Vergleiche mit $\overline{Y}_{..}$)

$$\text{Unter} H_0 : F_k \sim \chi^2_{k-1} \text{(asympt.)}$$

H_0 ablehnen, falls $F_k > \chi^2_{1-\alpha,k-1}$
oder falls p-value $< \alpha$.

Nichtparametrische Tests
Friedman-Test

- Bei Bindungen Korrektur des Nenners.
- Für kleinere n ist Friedman-Test (asy.) meist etwas konservativ.
- Für größere k (etwa $k \geq 5$) ist der Friedman-Test (bei NV) einigermaßen effizient.
- Für $k = 2$ ist der Friedman-Test zum Vorzeichentest äquivalent (also nicht besonders effizient).

Friedman-Test

Durchführung des Friedman-Tests

```
PROC FREQ;
   TABLES Faktor A * Faktor B * Y
      /CMH2 SCORES=RANK NOPRINT;
RUN;
```

NOPRINT: unterdrückt den Druck von Kontingenztafeln

SCORES=RANK: Ränge werden (zeilenweise) gebildet.

CMH2: Cochran-Mantel-Haenszel

`Test_Friedman_Hypnose.sas`
`Test_Friedman_Synchro.sas`

Hier ist nur die folgende Zeile interessant:
Row Mean Scores Differ