

Vorlesungsskript  
**Kryptologie 2**  
Sommersemester 2008

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

*24. April 2008*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kryptografische Hashverfahren</b>	<b>2</b>
2.1	Klassifikation von Hashverfahren . . . . .	3
2.2	Schlüssellose Hashfunktionen . . . . .	4
2.2.1	Das Zufallsorakelmodell (ZOM) . . . . .	6
2.2.2	Vergleich von Sicherheitsanforderungen . . . . .	9
2.2.3	Iterierte Hashfunktionen . . . . .	10
2.2.4	Die Merkle-Damgard-Konstruktion . . . . .	11
2.2.5	Die MD4-Hashfunktion . . . . .	12
2.2.6	Die MD5-Hashfunktion . . . . .	14
2.2.7	Die SHA-1-Hashfunktion . . . . .	15
2.2.8	Kryptoanalyse von Hashfunktionen . . . . .	16
2.3	Nachrichten-Authentikationscodes (MACs,) . . . . .	17

# 1 Einführung

Durch kryptographische Verfahren lassen sich unter anderem die folgenden **Schutzziele** realisieren.

- *Vertraulichkeit*
  - Geheimhaltung
  - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
  - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- *Integrität*
  - von Nachrichten und Daten
- *Zurechenbarkeit*
  - Authentikation
  - Unabstreitbarkeit
  - Identifizierung
- *Verfügbarkeit*
  - von Daten
  - von Rechenressourcen
  - von Informationsdienstleistungen

## 2 Kryptografische Hashverfahren

Kryptografische Hashverfahren sind ein wirksames Werkzeug zur Sicherstellung der Integrität von Nachrichten oder generell von digitalisierten Daten. In der Tat nehmen kryptografische Hashverfahren beim Schutz der Datenintegrität eine ähnlich herausragende Stellung ein wie sie Kryptosystemen bei der Wahrung der Vertraulichkeit zukommt. Daneben finden kryptografische Hashfunktionen aber auch vielfach als Bausteine von komplexeren Systemen Verwendung. Wie wir noch sehen werden, sind kryptografische Hashfunktionen etwa bei der Bildung von digitalen Signaturen sehr nützlich. Auf weitere Anwendungsmöglichkeiten werden wir später eingehen.

Den überaus meisten Anwendungen von kryptografischen Hashfunktionen  $h$  liegt die Idee zugrunde, dass sie zu einem vorgegebenen Text  $x$  eine zwar kompakte aber dennoch repräsentative Darstellung  $h(x)$  liefern, die unter praktischen Gesichtspunkten als eine eindeutige Identifikationsnummer von  $x$  fungieren kann. Die Berechnungsvorschrift für  $h$  muss daher gewissermaßen darauf abzielen, „charakteristische Merkmale“ von  $x$  in den Hashwert  $h(x)$  einfließen zu lassen. Da der Fingerabdruck eines Menschen ganz ähnliche Eigenschaften besitzt (was ihn für Kriminalisten bekanntlich so wertvoll macht), wird der Hashwert  $h(x)$  auch oft als ein **digitaler**

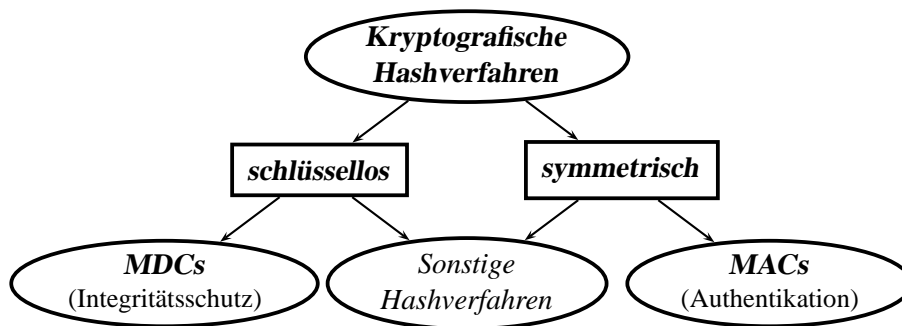


Abbildung 1: Eine grobe Einteilung von kryptografischen Hashverfahren.

**Fingerabdruck** von  $x$  bezeichnet. Gebräuchlich sind auch die Bezeichnungen **kryptografische Prüfsumme** oder *message digest* (englische Bezeichnung für „Nachrichtenextrakt“).

Typische Schutzziele, die sich mittels Hashfunktionen realisieren lassen, sind die Nachrichten- und Teilnehmerauthentikation.

- „Nachrichtenauthentikation“ (message authentication)
  - Wie lässt sich sicherstellen, dass eine Nachricht (oder eine Datei) während einer (räumlichen oder auch zeitlichen) Übertragung nicht verändert wurde?
  - Wie lässt sich der Urheber (oder Absender) einer Nachricht zweifelsfrei feststellen?
- „Teilnehmerauthentikation“ (entity authentication, identification)
  - Wie kann sich eine Person (oder ein Gerät) anderen gegenüber zweifelsfrei ausweisen?

## 2.1 Klassifikation von Hashverfahren

Kryptografische Hashverfahren lassen sich grob danach klassifizieren, ob der Hashwert lediglich in Abhängigkeit vom Eingabetext berechnet wird oder zusätzlich von einem symmetrischen Schlüssel abhängt (siehe Abbildung 1).

Kryptografische Hashfunktionen, bei deren Berechnung keine Schlüssel benutzt werden, dienen vornehmlich der Erkennung von unbefugt vorgenommenen Manipulationen an Dateien oder Nachrichten. Daher werden sie auch als **MDC** bezeichnet (**Manipulation Detection Code** [englisch] = Code zur Erkennung von Manipulationen). Zuweilen wird das Kürzel **MDC** auch als eine Abkürzung für **Modification Detection Code** verwendet. Seltener ist dagegen die Bezeichnung **MIC** (**message integrity codes**). Abbildung 2 zeigt eine typische Anwendung von MDCs.

Um die Integrität eines Datensatzes  $x$  sicherzustellen, der über einen ungesicherten Kanal gesendet (bzw. auf einem vor Manipulationen nicht sicheren Webserver abgelegt) wird, kann man wie folgt vorgehen. Man sendet den **MDC**-Hashwert von  $x$  über einen authentisierten Kanal und prüft, ob der Datensatz nach der Übertragung noch denselben Hashwert liefert.

Kryptografische Hashverfahren mit symmetrischen Schlüsseln finden hauptsächlich bei der Authentifizierung von Nachrichten Verwendung. Diese werden daher auch als **MAC** (**message authentication code** [englisch] = Code zur Nachrichtenauthentifizierung) oder als **Authentikationscode** bezeichnet. Daneben gibt es auch Hashverfahren mit asymmetrischen Schlüsseln. Diese werden jedoch der Rubrik der Signaturverfahren zugeordnet, da mit ihnen ausschließlich digitale Unterschriften gebildet werden. Wie sich Nachrichten mit einem MAC authentisieren lassen, ist in Abbildung 3 dargestellt. Man beachte, dass nun auch der Hashwert über den unsicheren Kanal gesendet wird.

Möchte Bob eine Nachricht  $x$  an Alice übermitteln, so berechnet er den zugehörigen MAC-Hashwert  $y = h_k(x)$  und fügt diesen der Nachricht  $x$  hinzu. Alice überprüft die Echtheit der empfangenen Nachricht  $(x', y')$ , indem sie ihrerseits den zu  $x'$  gehörigen Hashwert  $h_k(x')$  berechnet und das Ergebnis mit  $y'$  vergleicht. Der geheime Authentifikationsschlüssel  $k$  muss hierbei genau wie bei einem symmetrischen Kryptosystem über einen gesicherten Kanal vereinbart werden.

Indem Bob seine Nachricht  $x$  um den Hashwert  $y = h_k(x)$  ergänzt, gibt er Alice nicht nur die Möglichkeit, anhand von  $y$  die empfangene Nachricht auf Manipulationen zu überprüfen. Die Benutzung des geheimen Schlüssels  $k$  erlaubt zudem eine Überprüfung der Herkunft der Nachricht.

## 2.2 Schlüssellose Hashfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir verschiedene Sicherheitsanforderungen an einzelne Hashfunktionen  $h$ . Dabei nehmen wir an, dass  $h$  öffentlich bekannt ist, d.h.  $h$  ist eine schlüssellose Hashfunktion (MDC).

Sei  $h: X \rightarrow Y$  eine Hashfunktion. Ein Paar  $(x, y) \in X \times Y$  heißt **gültig** für  $h$ , falls  $h(x) = y$  ist. Ein Paar  $(x, x')$  mit  $h(x) = h(x')$  heißt **Kollisionspaar** für  $h$ . Die Anzahl  $\|Y\|$  der Hashwerte bezeichnen wir mit  $m$ . Ist auch der Textraum  $X$  endlich,  $\|X\| = n$ , so heißt  $h$  eine  $(n, m)$ -**Hashfunktion**. In diesem Fall verlangen wir meist, dass  $n \geq 2m$  ist, und wir nennen  $h$  dann eine **Kompressionsfunktion** (*compression function*).

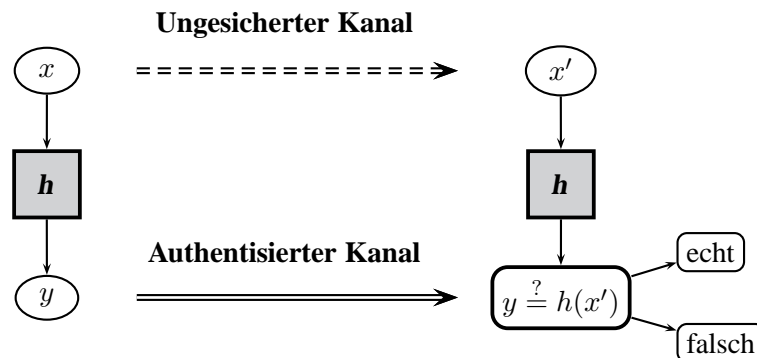


Abbildung 2: Einsatz eines MDC  $h$  zur Überprüfung der Integrität eines Datensatzes  $x$ .

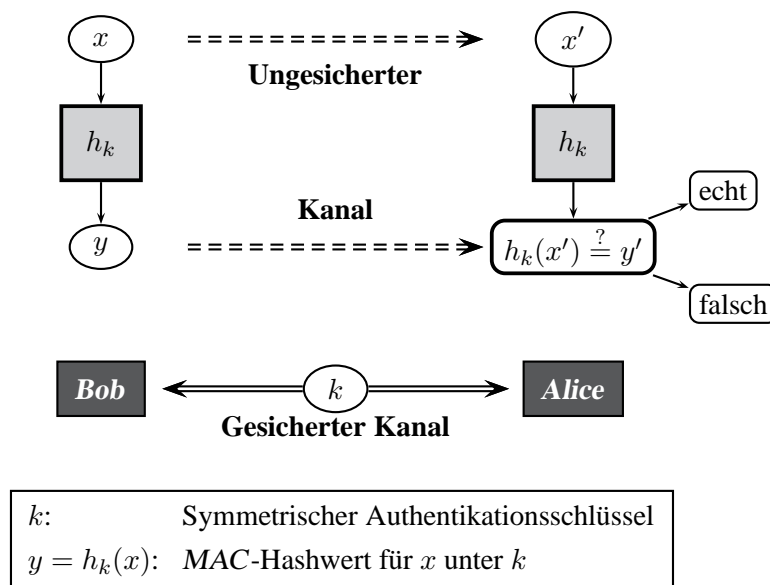


Abbildung 3: Verwendung eines MAC zur Nachrichtenauthentikation.

Da  $h$  öffentlich bekannt ist, ist es sehr einfach, für einen vorgegebenen Text  $x$  ein gültiges Paar  $(x, y)$  zu erzeugen. Für bestimmte kryptografische Anwendungen ist es wichtig, dass dies nicht möglich ist, falls der Hashwert  $y$  vorgegeben wird.

### Problem P1: Bestimmung eines Urbilds

*Gegeben:* Eine Hashfkt.  $h: X \rightarrow Y$  und ein Hashwert  $y \in Y$ .

*Gesucht:* Ein Text  $x \in X$  mit  $h(x) = y$ .

Falls es einen immensen Aufwand erfordert, für einen vorgegebenen Hashwert  $y$  einen Text  $x$  mit  $h(x) = y$  zu finden, so heißt  $h$  **Einweg-Hashfunktion** (*one-way hash function* bzw. *preimage resistant hash function*). Diese Eigenschaft wird beispielsweise benötigt, wenn die Hashwerte der Benutzerpasswörter in einer öffentlich zugänglichen Datei abgespeichert werden, wie es bei manchen Unix-Systemen der Fall ist.

### Problem P2: Bestimmung eines zweiten Urbilds

*Gegeben:* Eine Hashfkt.  $h: X \rightarrow Y$  und ein Text  $x \in X$ .

*Gesucht:* Ein Text  $x' \in X \setminus \{x\}$  mit  $h(x') = h(x)$ .

Falls sich für einen vorgegebenen Text  $x$  nur mit großem Aufwand ein weiterer Text  $x' \neq x$  mit dem gleichen Hashwert  $h(x') = h(x)$  finden lässt, heißt  $h$  **schwach kollisionsresistent** (*weakly collision resistant* bzw. *second preimage resistant*). Diese Eigenschaft wird in der durch Abbildung 2 skizzierten Anwendung benötigt. Beim Versuch, eine digitale Signatur zu fälschen (siehe unten), sieht sich der Gegner dagegen mit folgender Problemstellung konfrontiert.

**Algorithmus 1** FINDPREIMAGE( $h, y, q$ )

```

1  wähle eine beliebige Menge  $X_0 \subseteq X$  mit  $\|X_0\| = q$ 
2  for each  $x \in X_0$  do
3    if  $h(x) = y$  then
4      output  $x$ 
5    end
6  end
7  output „?“

```

Abbildung 4: Bestimmung eines Urbilds für einen Hashwert

**Problem P3: Bestimmung einer Kollision**

*Gegeben:* Eine Hashfkt.  $h: X \rightarrow Y$ .

*Gesucht:* Texte  $x \neq x' \in X$  mit  $h(x') = h(x)$ .

Falls sich dieses Problem nur mit einem immensen Aufwand lösen lässt, heißt  $h$  (**stark**) **kollisionsresistent** (*collision resistant*).

Obwohl die schwache Kollisionsresistenz eine gewisse Ähnlichkeit mit der Einweg-Eigenschaft aufweist, sind die beiden Eigenschaften im allgemeinen unvergleichbar. So muss eine schwach kollisionsresistente Funktion nicht notwendigerweise eine Einwegfunktion sein, da die Bestimmung eines Urbildes gerade für diejenigen Funktionswerte einfach sein kann, die nur ein einziges Urbild besitzen. Umgekehrt impliziert die Einweg-Eigenschaft auch nicht die schwache Kollisionsresistenz, da die Kenntnis eines Urbildes das Auffinden weiterer Urbilder sehr stark erleichtern kann.

**2.2.1 Das Zufallsorakelmodell (ZOM)**

Das ZOM dient dazu, die Effizienz verschiedener Angriffe auf eine Hashfunktion  $h: X \rightarrow Y$  nach oben abzuschätzen. Sind  $X$  und  $Y$  vorgegeben, so können wir eine Hashfunktion  $h: X \rightarrow Y$  dadurch „konstruieren“, dass wir für jedes  $x \in X$  zufällig ein  $y \in Y$  wählen und  $h(x)$  auf  $y$  setzen. Äquivalent hierzu ist, für  $h$  eine zufällige Funktion aus der Klasse  $F(X, Y)$  aller  $n^m$  Funktionen von  $X$  nach  $Y$  zu wählen. Dieses Verfahren ist auf Grund des hohen Aufwands zwar nicht mehr praktikabel, wenn  $n = \|X\|$  eine bestimmte Größe übersteigt. Es liefert uns aber ein theoretisches Modell für eine Hashfunktion mit „idealen“ kryptografischen Eigenschaften. Offensichtlich besteht für den Gegner die einzige Möglichkeit, Informationen über  $h$  zu erhalten, darin, sich für eine Reihe von Texten die zugehörigen Hashwerte zu besorgen (was der Befragung eines funktionalen Zufallsorakels entspricht).

Dass eine Zufallsfunktion  $h$  gute kryptografische Eigenschaften aufweist, rührt daher, dass der Hashwert  $h(x)$  für einen neuen Text  $x$  auch dann noch schwer vorhersagbar ist, wenn der Gegner bereits die Hashwerte einer beliebigen Zahl von Texten kennt.

**Algorithmus 4** FINDSECONDPREIMAGE( $h, x, q$ )

```

1   $y \leftarrow h(x)$ 
2  wähle eine beliebige Menge  $X_0 \subseteq X - \{x\}$  mit  $\|X_0\| = q - 1$ 
3  for each  $x_0 \in X_0$  do
4    if  $h(x_0) = y$  then
5      output  $x_0$ 
6    end
7  end
8  output „?“
```

Abbildung 5: Bestimmung eines zweiten Urbilds

**Proposition 2** Sei  $X_0 = \{x_1, \dots, x_k\}$  eine beliebige Menge von  $k$  verschiedenen Texten aus  $X$  und seien  $y_1, \dots, y_k \in Y$ . Dann gilt für eine zufällig aus  $F(X, Y)$  gewählte Funktion  $h$  und für jedes Paar  $(x, y) \in (X - X_0) \times Y$ ,

$$\Pr[h(x) = y \mid h(x_i) = y_i \text{ für } i = 1, \dots, k] = 1/m.$$

Um eine obere Komplexitätsschranke für das Urbildproblem im ZOM zu erhalten, betrachten wir den in Abbildung 4 dargestellten Algorithmus. Hier (und bei den beiden folgenden Algorithmen) gibt der Parameter  $q$  die Anzahl der Hashwertberechnungen (also die Anzahl der gestellten Orakelfragen an das Zufallsorakel  $h$ ) wider. Der Zeitaufwand der Berechnung ist dabei proportional zu  $q$ .

**Theorem 3** FINDPREIMAGE( $h, y, q$ ) gibt mit Wahrscheinlichkeit  $\varepsilon = 1 - (1 - 1/m)^q$  ein Urbild von  $y$  aus (unabhängig von der Wahl der Menge  $X_0$ ).

**Beweis** Sei  $y \in Y$  fest und sei  $X_0 = \{x_1, \dots, x_q\}$ . Für  $i = 1, \dots, q$  bezeichne  $E_i$  das Ereignis " $h(x_i) = y$ ". Nach Proposition 2 sind diese Ereignisse stochastisch unabhängig und ihre Wahrscheinlichkeit ist  $\Pr[E_i] = 1/m$  ( $i = 1, \dots, q$ ). Also folgt

$$\Pr[E_1 \cup \dots \cup E_q] = 1 - \Pr[\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_q}] = 1 - (1 - 1/m)^q.$$

Der in Abbildung 5 dargestellte Algorithmus liefert uns eine obere Schranke für die Komplexität des Problems, ein zweites Urbild für  $h(x)$  zu bestimmen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit lässt sich vollkommen analog zum vorherigen Satz bestimmen.

**Theorem 5** FINDSECONDPREIMAGE( $h, x, q$ ) gibt mit Wahrscheinlichkeit  $\varepsilon = 1 - (1 - 1/m)^{q-1}$  ein zweites Urbild  $x_0 \neq x$  von  $y = h(x)$  aus.

Ist  $q$  vergleichsweise klein, so ist bei beiden bisher betrachteten Angriffen  $\varepsilon \approx q/m$ . Um also auf eine Erfolgswahrscheinlichkeit von  $1/2$  zu kommen, ist  $q \approx m/2$  zu wählen.

Geht es lediglich darum, irgendein Kollisionspaar  $(x, x')$  aufzuspüren, so bietet sich ein sogenannter **Geburtstagsangriff** an. Dieser ist deutlich zeiteffizienter zu realisieren. Wie der Name schon andeutet, basiert dieser Angriff auf dem sogenannten Geburtstagsparadoxon, welches in seiner einfachsten Form folgendes besagt.



**Algorithmus 6** COLLISION( $h, q$ )

```

1  wähle eine beliebige Menge  $X_0 \subseteq X$  mit  $\|X_0\| = q$ 
2  for each  $x \in X_0$  do
3     $y_x \leftarrow h(x)$ 
4  end
5  if  $y_x = y_{x'}$  für zwei Texte  $x \neq x'$  in  $X_0$  then
6    output  $(x, x')$ 
7  else
8    output „?“
9  end

```

Abbildung 6: Bestimmung eines Kollisionspaares

**Geburtstagsparadoxon:** Bereits in einer Schulklasse mit 23 Schulkindern haben mit einer Wahrscheinlichkeit größer  $1/2$  mindestens zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag (dies erscheint zwar verblüffend, wird aber durch die Praxis mehr als bestätigt).

Tatsächlich zeigt der nächste Satz, dass bei  $q$ -maligem Ziehen (mit Zurücklegen) aus einer Urne mit  $m$  Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$1 - \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-q+1)}{m^{q-1}}$$

eine Kugel zweimal gezogen wird. Für  $m = 365$  und  $q = 23$  ergibt dies einen Wert von ungefähr 0,507.

Zur Kollisionsbestimmung verwenden wir den in Abbildung 6 dargestellten Algorithmus. Bei einer naiven Implementierung würde zwar der Zeitaufwand für die Auswertung der if-Bedingung quadratisch von  $q$  abhängen. Trägt man aber jeden Text  $x$  unter dem Suchwort  $h(x)$  in eine (herkömmliche) Hashtabelle der Größe  $q$  ein, so wird der Zeitaufwand für die Bearbeitung jedes einzelnen Textes  $x$  im wesentlichen durch die Berechnung von  $h(x)$  bestimmt.

**Theorem 7** COLLISION( $h, q$ ) gibt mit Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\varepsilon = 1 - \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-q+1)}{m^{q-1}}$$

ein Kollisionspaar  $(x, x')$  für  $h$  aus.

**Beweis** Sei  $X_0 = \{x_1, \dots, x_q\}$ . Für  $i = 1, \dots, q$  bezeichne  $E_i$  das Ereignis

$$“h(x_i) \notin \{h(x_1), \dots, h(x_{i-1})\}.”$$

Dann beschreibt  $E_1 \cap \dots \cap E_q$  das Ereignis “COLLISION( $h, q$ ) gibt ? aus” und für  $i = 1, \dots, q$  gilt

$$\Pr[E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1}] = \frac{m-i+1}{m}.$$

```

1 wähle zufällig  $x \in X$ 
2  $x' \leftarrow A(x)$ 
3 if  $x' \neq x$  then
4   output  $(x, x')$ 
5 else
6   output „?“
7 end

```

Abbildung 7: Reduktion des Kollisionsproblems auf das Problem, ein zweites Urbild zu bestimmen

Dies führt auf die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 1 - \Pr[E_1 \cap \dots \cap E_q] \\
&= 1 - \Pr[E_1] \Pr[E_2 | E_1] \dots \Pr[E_q | E_1 \cap \dots \cap E_{q-1}] \\
&= 1 - \left(\frac{m-1}{m}\right) \left(\frac{m-2}{m}\right) \dots \left(\frac{m-q+1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Mit  $1 - x \approx e^{-x}$  folgt

$$\varepsilon = 1 - \prod_{i=1}^{q-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right) \approx 1 - \prod_{i=1}^{q-1} e^{-\frac{i}{m}} = 1 - e^{-\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{q-1} i} = 1 - e^{-\frac{q(q-1)}{2m}} \approx q^2/2m.$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$q \approx c_\varepsilon \sqrt{m}$$

mit  $c_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$ . Für  $\varepsilon = 1/2$  ergibt sich also  $q \approx \sqrt{m}$ . Besitzt also eine binäre Hashfunktion  $h: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  die Hashwertlänge  $m = 128$  Bit, so müssen im ZOM  $q \approx \cdot 2^{64}$  Texte gehasht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  eine Kollision zu finden. Um einem Geburtstagsangriff widerstehen zu können, sollte eine Hashfunktion mindestens eine Hashwertlänge von 128 oder besser 160 Bit haben.

### 2.2.2 Vergleich von Sicherheitsanforderungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass stark kollisionsresistente Hashfunktionen sowohl schwach kollisionsresistent als auch Einweghashfunktionen sein müssen.

**Theorem 8** Sei  $h: X \rightarrow Y$  eine  $(n, m)$ -Hashfunktion. Dann ist das Problem P3, ein Kollisionspaar für  $h$  zu bestimmen, auf das Problem P2, ein zweites Urbild zu bestimmen, reduzierbar. Folglich sind stark kollisionsresistente Hashfunktionen auch schwach kollisionsresistent.

**Beweis** Sei  $A$  ein Las-Vegas Algorithmus, der für ein zufällig aus  $X$  gewähltes  $x$  mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  ein zweites Urbild  $x'$  für  $h$  liefert. Dann ist klar, dass der in Abbildung 7 dargestellte Las-Vegas Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  ein Kollisionspaar ausgibt.

```

1  wähle zufällig  $x \in X$ 
2   $y \leftarrow h(x)$ 
3   $x' \leftarrow A(y)$ 
4  if  $x \neq x'$  then
5    output  $(x, x')$ 
6  else
7    output „?“
8  end

```

Abbildung 8: Reduktion des Kollisionsproblems auf das Urbildproblem

Als nächstes zeigen wir, wie sich das Kollisionsproblem auf das Urbildproblem reduzieren lässt.

**Theorem 9** Sei  $h: X \rightarrow Y$  eine  $(n, m)$ -Hashfunktion mit  $n \geq 2m$ . Dann ist das Problem P3, ein Kollisionspaar für  $h$  zu bestimmen, auf das Problem P1, ein Urbild zu bestimmen, reduzierbar.

**Beweis** Sei  $A$  ein Invertierungsalgorithmus für  $h$ , d.h.  $A$  berechnet für jeden Hashwert  $y$  in  $W(h) = \{h(x) \mid x \in X\}$  ein Urbild  $x$  mit  $h(x) = y$ . Betrachte den in Abbildung 8 dargestellten Las-Vegas Algorithmus B.

Sei  $C = \{h^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ . Dann hat  $B$  eine Erfolgswahrscheinlichkeit von

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{\|C\|}{\|X\|} \cdot \frac{\|C\| - 1}{\|C\|} = \frac{1}{n} \sum_{C \in \mathcal{C}} (\|C\| - 1) = (n - m)/n \geq \frac{1}{2}.$$

### 2.2.3 Iterierte Hashfunktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich aus einer kollisionsresistenten Kompressionsfunktion

$$h: \{0, 1\}^{m+t} \rightarrow \{0, 1\}^m$$

eine kollisionsresistente Hashfunktion

$$\hat{h}: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^t$$

konstruieren lässt. Hierzu betrachten wir folgende kanonische Konstruktionsmethode.

**Preprocessing:** Transformiere  $x \in \{0, 1\}^*$  mittels einer Funktion

$$y: \{0, 1\}^* \rightarrow \bigcup_{r \geq 1} \{0, 1\}^{rt}$$

zu einem String  $y(x)$  mit der Eigenschaft  $|y(x)| \equiv_t 0$ .

**Processing:** Sei  $IV \in \{0, 1\}^m$  ein öffentlich bekannter Initialisierungsvektor und sei  $y(x) = y_1 \cdots y_r$  mit  $|y_i| = t$  für  $i = 1, \dots, r$ . Berechne eine Folge  $z_0, \dots, z_r$  von Strings  $z_i \in \{0, 1\}^m$  wie folgt:

$$z_i = \begin{cases} IV, & i = 0, \\ h(z_{i-1}y_i), & i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

**Optionale Ausgabetransformation:** Berechne den Hashwert  $\hat{h}(x) = g(z_r)$ , wobei  $g: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^l$  eine öffentlich bekannte Funktion ist. (Meist wird für  $g$  die Identität verwendet.)

Um  $\hat{h}(x)$  zu berechnen, muss also die Kompressionsfunktion  $h$  genau  $r$ -mal aufgerufen werden. Wir formulieren nun eine für Preprocessing-Funktionen wünschenswerte Eigenschaft.

**Definition 10** Eine Funktion  $y: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  heißt **suffixfrei**, falls es keine Strings  $x \neq \tilde{x}$  und  $z$  in  $\{0, 1\}^*$  mit  $y(\tilde{x}) = zy(x)$  gibt (d.h. kein Funktionswert  $y(x)$  ist Suffix eines Funktionswertes  $y(\tilde{x})$  an einer Stelle  $\tilde{x} \neq x$ ).

Man beachte, dass jede suffixfreie Funktion insbesondere injektiv ist.

**Theorem 11** Falls die Preprocessing-Funktion  $y$  suffixfrei und die Ausgabetransformation  $g$  injektiv ist, so ist mit  $h$  auch  $\hat{h}$  kollisionsresistent.

**Beweis** Angenommen, es gelingt, ein Kollisionspaar  $x, \tilde{x}$  für  $\hat{h}$  mit  $\hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x})$  zu finden. Sei

$$y(x) = y_1y_2 \dots y_{k-1}y_k \text{ und } y(\tilde{x}) = \tilde{y}_1\tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_{l-1}\tilde{y}_l \text{ mit } k \leq l.$$

Da  $y$  suffixfrei ist, muss ein Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $y_i \neq \tilde{y}_{l-k+i}$  existieren. Weiter seien  $z_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ) und  $\tilde{z}_j$  ( $j = 0, \dots, l$ ) die in der Processing-Phase berechneten Hashwerte. Da  $g$  injektiv ist, muss mit  $g(z_k) = \hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x}) = g(\tilde{z}_l)$  auch  $z_k = \tilde{z}_l$  gelten. Sei  $i_{max}$  der größte Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $z_{i-1}y_i \neq \tilde{z}_{l-k+i-1}\tilde{y}_{l-k+i}$ . Dann bilden  $z_{i_{max}-1}y_{i_{max}}$  und  $\tilde{z}_{l-k+i_{max}-1}\tilde{y}_{l-k+i_{max}}$  wegen

$$h(z_{i_{max}-1}y_{i_{max}}) = z_{i_{max}} = \tilde{z}_{l-k+i_{max}} = h(\tilde{z}_{l-k+i_{max}-1}\tilde{y}_{l-k+i_{max}})$$

ein Kollisionspaar für  $h$ .

## 2.2.4 Die Merkle-Damgard-Konstruktion

Merkle und Damgard schlugen 1989 folgende konkrete Realisierung ihrer Konstruktion vor. Als Initialisierungsvektors wird der Nullvektor  $IV = 0^m$  benutzt, die optionale Ausgabetransformation entfällt, und für  $y(x)$  wird im Fall  $t \geq 2$  die folgende Funktion verwendet. (Den Fall  $t = 1$  betrachten wir später.)

Für  $x = \varepsilon$  sei  $y(x) = 0^t$  und für  $x \in \{0, 1\}^n$  mit  $n > 0$  sei  $k = \lceil \frac{n}{t-1} \rceil$  und  $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$  mit  $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_{k-1}| = t - 1$  sowie  $|x_k| = t - 1 - d$ , wobei  $0 \leq d < t - 1$ . Im Fall

$k = 1$  ist dann  $y(x) = 0x0^d 1 \text{bin}_{t-1}(d)$  und für  $k > 1$  ist  $y(x) = y_1 \cdots y_{k+1}$ , wobei

$$y_i = \begin{cases} 0x_1, & i = 1, \\ 1x_i, & 2 \leq i < k, \\ 1x_k 0^d, & i = k, \\ 1 \text{bin}_{t-1}(d), & i = k + 1, \end{cases} \quad (1)$$

und  $\text{bin}_{t-1}(d)$  die durch führende Nullen auf die Länge  $t - 1$  aufgefüllte Binärdarstellung von  $d$  ist.

**Theorem 12** Die durch (1) definierte Preprocessing-Funktion  $y$  ist suffixfrei.

**Beweis** Seien  $x \neq \tilde{x}$  zwei Texte mit  $|x| \leq |\tilde{x}|$ . Wir müssen zeigen, dass  $y(x) = y_1 y_2 \cdots y_{k+1}$  kein Suffix von  $y(\tilde{x}) = \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \cdots \tilde{y}_{l+1}$  ist. Im Fall  $x = \varepsilon$  ist dies klar. Für  $x \neq \varepsilon$  machen wir folgende Fallunterscheidung.

- 1. Fall:**  $|x| \not\equiv_{t-1} |\tilde{x}|$ . Dann folgt  $d \neq \tilde{d}$  und somit  $y_{k+1} \neq \tilde{y}_{l+1}$ .
- 2. Fall:**  $|x| = |\tilde{x}|$ . In diesem Fall ist  $k = l$ . Wegen  $x \neq \tilde{x}$  existiert ein Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $x_i \neq \tilde{x}_i$ . Dies impliziert  $y_i \neq \tilde{y}_i$ , also ist  $y(x)$  kein Suffix von  $y(\tilde{x})$ .
- 3. Fall:**  $|x| \neq |\tilde{x}|$  und  $|x| \equiv_{t-1} |\tilde{x}'|$ . In diesem Fall ist  $k < l$ . Da  $y(x)$  mit einer Null beginnt, aber das  $(l - k + 1)$ -te Bit von  $y(\tilde{x})$  eine Eins ist, kann  $y(x)$  kein Suffix von  $y(\tilde{x})$  sein.

Nun kommen wir zum Fall  $t = 1$ . Sei  $y$  die durch  $y(x) := 11f(x)$  definierte Funktion, wobei  $f$  wie folgt definiert ist:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n) \text{ mit } f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 01.$$

Dann ist leicht zu sehen, dass  $y$  suffixfrei ist. Da die Kompressionsfunktion  $h$  bei der Berechnung von  $\hat{h}(x)$  im Fall  $t = 1$  für jedes Bit von  $y(x)$  einmal aufgerufen wird, wird  $h$  genau  $|y(x)| \leq 2(n+1)$ -mal aufgerufen. Im Fall  $t > 1$  werden dagegen nur  $k+1 = \lceil \frac{n}{t-1} \rceil + 1$  Aufrufe benötigt.

### 2.2.5 Die MD4-Hashfunktion

Die MD4-Hashfunktion (*Message Digest*) wurde 1990 von Rivest vorgeschlagen. Die Bitlänge von MD4 beträgt  $l = 128$  Bit. Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 4 Wörtern. MD4 benutzt folgende Operationen auf Wörtern.

Operatoren auf $\{0, 1\}^{32}$	
$X \wedge Y$	bitweises „Und“ von $X$ und $Y$
$X \vee Y$	bitweises „Oder“ von $X$ und $Y$
$X \oplus Y$	bitweises „exklusives Oder“ von $X$ und $Y$
$\neg X$	bitweises Komplement von $X$
$X + Y$	Ganzzahl-Addition modulo $2^{32}$
$X \leftarrow s$	zirkulärer Linksshift um $s$ Stellen

Während die Ganzzahl-Addition bei MD4 und MD5 in *little endian* Architektur (d.h. ein aus 4 Bytes  $a_0a_1a_2a_3$ ,  $0 \leq a_i \leq 255$  zusammengesetztes Wort repräsentiert die Zahl  $a_32^{24} + a_22^{16} + a_12^8 + a_0$ ) ausgeführt wird, verwendet SHA-1 eine *big endian* Architektur (d.h.  $a_0a_1a_2a_3$ ,  $0 \leq a_i \leq 255$  repräsentiert die Zahl  $a_02^{24} + a_12^{16} + a_22^8 + a_3$ ). Der MD4-Algorithmus benutzt die folgenden Konstanten  $y_j, z_j, s_j, j = 0, \dots, 47$

	$y_j$ (in Hexadezimaldarstellung)
$j = 0, \dots, 15$	0
$j = 16, \dots, 31$	5a827999
$j = 32, \dots, 47$	6ed9eba1
	$z_j$
$j = 0, \dots, 15$	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
$j = 16, \dots, 31$	0, 4, 8, 12, 1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15
$j = 32, \dots, 47$	0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15
	$s_j$
$j = 0, \dots, 15$	3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19
$j = 16, \dots, 31$	3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13
$j = 32, \dots, 47$	3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15

und folgende Funktionen  $f_j, j = 0, \dots, 47$

$$f_j(X, Y, Z) := \begin{cases} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z), & j = 0, \dots, 15, \\ (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z), & j = 16, \dots, 31, \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 32, \dots, 47. \end{cases}$$

Für MD4 konnten nach ca.  $2^{20}$  Hashwertberechnungen Kollisionen aufgespürt werden. Deshalb gilt MD4 nicht mehr als kollisionsresistent.

### Algorithmus 13 MD4(x)

- 1 **Eingabe:**  $x \in \{0, 1\}^*, |x| = n$
- 2  $y \leftarrow x10^k \text{bin}_{64}(n), k \in \{0, 1, \dots, 511\}$  mit  $n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$
- 3  $(H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (67452301, \text{efcdab89}, 98\text{badcfe}, 10325476)$
- 4 sei  $y = M_1 \cdots M_r, r = (n + 1 + k + 64)/512$
- 5 **for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $r$  **do**
- 6   sei  $M_i = X[0] \cdots X[15]$
- 7    $(A, B, C, D) \leftarrow (H_1, H_2, H_3, H_4)$
- 8   **for**  $j \leftarrow 0$  **to** 47 **do**
- 9      $(A, B, C, D) \leftarrow (D, (A + f_j(B, C, D) + X[z_j] + y_j) \leftarrow s_j, B, C)$
- 10   **end**
- 11    $(H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (H_1 + A, H_2 + B, H_3 + C, H_4 + D)$
- 12 **end**
- 13 **Ausgabe:**  $H_1H_2H_3H_4$

### 2.2.6 Die MD5-Hashfunktion

Der MD5 ist eine 1991 von Rivest präsentierte verbesserte Version von MD4. Die Bitlänge von MD5 beträgt wie bei MD4  $l = 128$  Bit. Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 4 Wörtern. In MD5 werden teilweise andere Konstanten als in MD4 verwendet. Zudem besitzt MD5 eine zusätzliche 4. Runde ( $j = 48, \dots, 63$ ), in der die Funktion  $f_j(X, Y, Z) = Y \oplus (X \vee \neg Z)$  verwendet wird. Außerdem wurde die in Runde 2 von MD4 verwendete Funktion durch  $f_j(X, Y, Z) := (X \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z)$ ,  $j = 16 \dots 31$ , ersetzt. Die  $y$ -Konstanten sind definiert als  $y_j :=$  die ersten 32 Bit der Binärdarstellung von  $\text{abs}(\sin(j + 1))$ ,  $0 \leq j \leq 63$ , und für  $z_j$  und  $s_j$  werden folgende Konstanten benutzt.

	$z_j$
$j = 0, \dots, 15$	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
$j = 16, \dots, 31$	1, 6, 11, 0, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12
$j = 32, \dots, 47$	5, 8, 11, 14, 1, 4, 7, 10, 13, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 2
$j = 48, \dots, 63$	0, 7, 14, 5, 12, 3, 10, 1, 8, 15, 6, 13, 4, 11, 2, 9
	$s_j$
$j = 0, \dots, 15$	7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22
$j = 16, \dots, 31$	5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20
$j = 32, \dots, 47$	4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23
$j = 48, \dots, 63$	6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21

Für MD5 konnten in 2004 ebenfalls Kollisionspaare gefunden werden (für die Kompressionsfunktion von MD5 gelang dies bereits 1996).

#### Algorithmus 14 MD5(x)

```

1  Eingabe:  $x \in \{0, 1\}^*$ ,  $|x| = n$ 
2   $y \leftarrow x10^k \text{bin}_{64}(n)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 511\}$  mit  $n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$ 
3   $(H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (67452301, \text{efcdab89}, 98\text{badcfe}, 10325476)$ 
4  sei  $y = M_1 \cdots M_r$ ,  $r = (n + 1 + k + 64)/512$ 
5  for  $i \leftarrow 1$  to  $r$  do
6    sei  $M_i = X[0] \cdots X[15]$ 
7     $(A, B, C, D) \leftarrow (H_1, H_2, H_3, H_4)$ 
8    for  $j \leftarrow 0$  to 63 do
9       $(A, B, C, D) \leftarrow (D, (A + f_j(B, C, D) + X[z_j] + y_j) \leftrightarrow s_j, B, C)$ 
10   end
11    $(H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (H_1 + A, H_2 + B, H_3 + C, H_4 + D)$ 
12  end
13  Ausgabe:  $H_1 H_2 H_3 H_4$ 

```

### 2.2.7 Die SHA-1-Hashfunktion

Der *Secure Hash Algorithm* (SHA-1) ist eine Weiterentwicklung des MD4 bzw. MD5 Algorithmus. Er gilt in den USA als Standard und ist Bestandteil des DSS (Digital Signature Standard). Die Bitlänge von SHA-1 beträgt  $l = 160$  Bit. Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 5 Wörtern. SHA-1 unterscheidet sich nur geringfügig von der SHA-0 Hashfunktion, in der eine Schwachstelle dazu führt, dass nach Berechnung von ca.  $2^{61}$  Hashwerten ein Kollisionspaar gefunden werden kann (obwohl bei einem Geburtstagsangriff auf Grund der Hashwertlänge von 160 Bit ca.  $2^{80}$  Berechnungen erforderlich sein müssten). Diese potentielle Schwäche von SHA-0 wurde im SHA-1 dadurch entfernt, dass SHA-1 in Zeile 8 einen zirkulären Shift um eine Bitstelle ausführt. Der SHA-1-Algorithmus benutzt die folgenden Konstanten  $K_j, j = 0, \dots, 79$

	$K_j$ (in Hexadezimaldarstellung)
$j = 0, \dots, 19$	5a827999
$j = 20, \dots, 39$	6ed9eba1
$j = 40, \dots, 59$	8f1bbcdc
$j = 60, \dots, 79$	ca62c1d6

und folgende Funktionen  $f_j, j = 0, \dots, 79$

$$f_j(X, Y, Z) := \begin{cases} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z), & j = 0, \dots, 19, \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 20, \dots, 39, \\ (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z), & j = 40, \dots, 59, \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 60, \dots, 79. \end{cases}$$

#### Algorithmus 15 SHA-1(x)

```

1  Eingabe:  $x \in \{0, 1\}^*, |x| = n$ 
2   $y \leftarrow x10^k \text{bin}_{64}(n), k \in \{0, 1, \dots, 511\}$  mit  $n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$ 
3   $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (67452301, \text{efcdab89}, 98\text{badcfe}, 10325476, \text{c3d2e1f0})$ 
4  sei  $y = M_1 \cdots M_r, r = (n + 1 + k + 64)/512$ 
5  for  $i \leftarrow 1$  to  $r$  do
6    sei  $M_i = X[0] \cdots X[15]$ 
7    for  $t \leftarrow 16$  to  $79$  do
8       $X[t] \leftarrow (X[t - 3] \oplus X[t - 8] \oplus X[t - 14] \oplus X[t - 16]) \leftarrow 1$ 
9    end
10    $(A, B, C, D, E) \leftarrow (H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ 
11   for  $j \leftarrow 0$  to  $79$  do
12      $\text{temp} \leftarrow (A \leftarrow 5) + f_j(B, C, D) + E + X[j] + K_j$ 
13      $(A, B, C, D, E) \leftarrow (\text{temp}, A, B \leftarrow 30, C, D)$ 
14   end
15    $(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4) \leftarrow (H_0 + A, H_1 + B, H_2 + C, H_3 + D, H_4 + E)$ 
16 end
17 Ausgabe:  $H_0H_1H_2H_3H_4$ 

```



### 2.2.8 Kryptoanalyse von Hashfunktionen

Bereits 1991 wurden von Den Boer und Bosselaers Schwächen im MD4 aufgedeckt. Im August 2004 erschien ein Bericht [1] mit einer Anleitung, wie sich Kollisionen für MD4 mittels “hand calculation” finden lassen.

In 1993, fanden den Boer und Bosselaers einen Weg, so genannte “Pseudo-Kollisionen” für die MD5 Kompressionsfunktion zu generieren. In 1996, fand Dobbertin ein Kollisionspaar für die MD5 Kompressionsfunktion.

Im August 2004 wurden schließlich Kollisionen für MD5 von Xiaoyun Wang, Dengguo Feng, Xuejia Lai and Hongbo Yu berechnet. Der benötigte Aufwand wurde mit ca. 1 Stunde auf einem IBM p690 Cluster abgeschätzt.

Im März 2005 veröffentlichten Arjen Lenstra, Xiaoyun Wang, and Benne de Weger zwei X.509 Zertifikate mit unterschiedlichen Public-keys, die auf denselben MD5-Hashwert führten. Nur wenige Tage später beschrieb Vlastimil Klima eine Möglichkeit, Kollisionen für MD5 innerhalb weniger Stunden auf einem Notebook zu berechnen. Mittels der so genannten Tunneling-Methode wurde die Rechenzeit vom gleichen Autor im März 2006 auf eine Minute verkürzt.

Auf der CRYPTO 98 stellten Chabaud und Joux einen Angriff auf SHA-0 vor, der ein Kollisionspaar mit nur  $2^{61}$  Hashwertberechnungen (anstelle von  $2^{80}$  bei einem Geburtstagsangriff) aufspürt.

In 2004 fanden Biham und Chen Beinahe-Kollisionen für den SHA-0, bei denen sich die Hashwerte nur an 18 von den 160 Bitpositionen unterschieden. Zudem legten sie volle Kollisionen für den auf 62 Runden reduzierten SHA-0 Algorithmus vor.

Schließlich wurde im August 2004 die Berechnung einer Kollision für den vollen 80-Runden SHA-0 Algorithmus von Joux, Carribault, Lemuet and Jalby bekannt gegeben. Hierzu wurden lediglich  $2^{51}$  Hashwerte berechnet, die ca. 80 000 Stunden CPU-Rechenzeit auf einem 2-Prozessor 256-Itanium Supercomputer benötigten.

Im August 2004 wurde von Wang, Feng, Lai und Yu auf der CRYPTO 2004 eine Angriffsmethode für MD5, SHA-0 und andere Hashfunktionen vorgestellt, mit der sich die Anzahl der Hashwertberechnungen auf  $2^{40}$  senken lässt. Dies wurde im Februar 2005 von Xiaoyun Wang, Yiqun Lisa Yin und Hongbo Yu leicht auf  $2^{39}$  Hashwertberechnungen verbessert.

Aufgrund der erfolgreichen Angriffe auf SHA-0 rieten mehrere Experten von einer weiteren Anwendung des SHA-1 ab. Daraufhin kündigte die amerikanische Behörde NIST an, SHA-1 in 2010 zugunsten der SHA-2 Varianten abzulösen.

In 2005 veröffentlichten Rijmen und Oswald einen Angriff, der mit weniger als  $2^{80}$  Hashwertberechnungen ein Kollisionspaar für den auf 53 Runden reduzierten SHA-1 Algorithmus findet. Nur wenig später kündigten Xiaoyun Wang, Yiqun Lisa Yin und Hongbo Yu einen Angriff auf den vollen 80-Runden SHA-1 mit  $2^{69}$  Hashwertberechnungen an. Im August 2005 erfuhr der benötigte Aufwand von Xiaoyun Wang, Andrew Yao and Frances Yao auf der CRYPTO 2005 eine weitere Reduktion auf  $2^{63}$  Berechnungen.

## 2.3 Nachrichten-Authentikationscodes (MACs)

**Definition 16** Eine **Hashfamilie**  $\mathcal{H}$  wird durch folgende Komponenten beschrieben:

- $X$ , eine endliche oder unendliche Menge von Texten,
- $Y$ , endliche Menge aller möglichen **Hashwerte**,  $\|Y\| \leq \|X\|$ ,
- $K$ , endlicher **Schlüsselraum** (key space), wobei jeder Schlüssel  $k \in K$  eine Hashfunktion  $h_k: X \rightarrow Y$  spezifiziert.

Im folgenden werden wir die Größe  $\|X\|$  des Textraumes mit  $n$ , die des Hashwertbereiches  $Y$  mit  $m$  und die des Schlüsselraumes  $K$  mit  $l$  bezeichnen. Wir nennen dann  $(X, Y, K, H)$  auch eine  $(n, m, l)$ -Hashfamilie.

Damit ein geheimer Schlüssel  $k$  für die Authentifizierung mehrerer Nachrichten benutzt werden kann, ohne dass dies einem potentiellen Gegner zur nichtautorisierten Berechnung von gültigen MAC-Werten verhilft, sollte folgende Bedingung erfüllt sein.

**Berechnungsresistenz:** Auch wenn eine Reihe von unter einem Schlüssel  $k$  generierten Text-Hashwert-Paaren  $(x_1, \mathcal{A}(k, x_1)), \dots, (x_n, \mathcal{A}(k, x_n))$  bekannt ist, erfordert es einen immensen Aufwand, in Unkenntnis von  $k$  ein weiteres Paar  $(x, y)$  mit  $y = \mathcal{A}(k, x)$  zu finden.

Bei Verwendung einer berechnungsresistenten Hashfunktion ist es einem Gegner nicht möglich, an Alice eine Nachricht  $x$  zu schicken, die Alice als von Bob stammend anerkennt.