

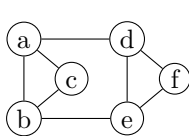
Übungsblatt 5

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 8.–11. 12. 2020
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 7. 12. 2020, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. 12. 2020, 23:59 Uhr

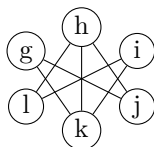
Aufgabe 29

mündlich

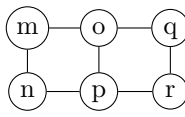
Als den *Komplementärgraphen* eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir den Graphen $\overline{G} = (V, \{\{u, v\} \mid u \neq v, \{u, v\} \notin E\})$. Weiter bezeichnen wir G als *selbstkomplementär*, falls er zu $\overline{G}$ isomorph ist.



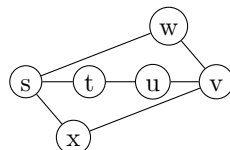
G_1



G_2

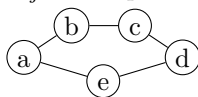


G_3

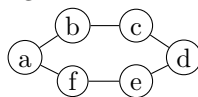


G_4

- (a) Betrachten Sie die Graphen $G_1, \dots, G_4$. Bestimmen Sie für alle $1 \leq i < j \leq 4$, ob die Graphen G_i und G_j isomorph sind. Begründen Sie Ihre Antwort.



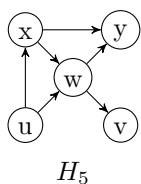
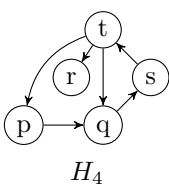
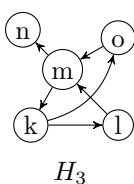
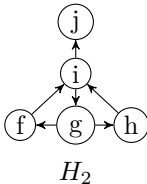
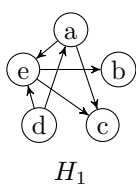
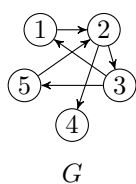
C_5



C_6

- (b) Betrachten Sie nun die Graphen C_5 und C_6 . Welche der Graphen sind selbstkomplementär? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Geben Sie möglichst viele nichtisomorphe selbstkomplementäre Graphen mit bis zu 7 Knoten an. Begründen Sie, warum es nicht mehr gibt.

Aufgabe 30 Es seien die folgenden gerichteten Graphen gegeben: **10 Punkte**



- Geben Sie für jeden der gerichteten Graphen $G, H_1, \dots, H_5$ die Anzahl der starken Zusammenhangskomponenten an. (3 Punkte)
- Welche der gerichteten Graphen $H_1, \dots, H_5$ sind isomorph zu G , welche nicht? Wenn Sie isomorphe gerichtete Graphen vorliegen haben, geben Sie einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen gerichteten Graphen an. Bei nicht isomorphen gerichteten Graphen begründen Sie kurz Ihre Antwort. (5 Punkte)
- Welche der gerichteten Graphen $H_1, \dots, H_5$ sind zu H_1 isomorph? (2 Punkte)

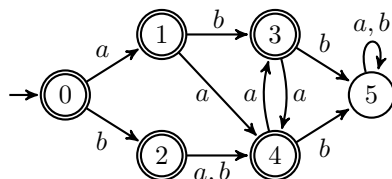
Aufgabe 31 Gegeben sei nebenstehender DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$. **mündlich**

- Für $z \in Z$ sei $M_z = (Z, \Sigma, \delta, z, E)$. Geben Sie für alle $z \in Z$ die Sprachen $L(M_z)$ an.

Hinweis: Bearbeiten Sie die Zustände z in absteigender Reihenfolge.

- Sei $\sim_M$ die Äquivalenzrelation auf Z mit $p \sim_M q \Leftrightarrow L(M_p) = L(M_q)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim_M$ und ein Repräsentantensystem an.

- Erinnerung: Es gilt $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ein Wort $x \in L(M_p) \Delta L(M_q)$ heißt *Unterscheider* für p und q . Geben Sie je einen Unterscheider für 0 und 1, 2 und 3 sowie 0 und 5 an.



Aufgabe 32 Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und für $i \geq 0$ sei **mündlich**

$$D_i = \left\{ \{p, q\} \subseteq Z \mid p \text{ und } q \text{ haben einen Unterscheider } x \text{ der Länge } |x| \leq i \right\}$$

(siehe **Aufgabe 31** für *Unterscheider*).

- Zeigen Sie, dass die durch $p \sim_i q \Leftrightarrow \{p, q\} \notin D_i$ auf Z definierten Relationen $\sim_i$ Äquivalenzrelationen sind und $\sim_{i+1}$ eine Verfeinerung von $\sim_i$ ist.
- Schätzen Sie die Zahl $k = \min\{i \geq 0 \mid D_{i+1} = D_i\}$ in Abhängigkeit von $m = \|Z\|$ möglichst gut nach oben ab.

Aufgabe 33 Sei R eine Relation auf einer Menge A .

10 Punkte

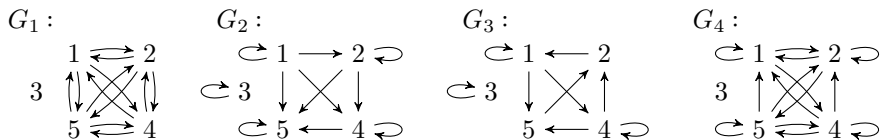
Wir definieren zu R folgende Relation R' auf der Menge $A \times A$:

$$(a_1, a_2)R'(b_1, b_2) :\Leftrightarrow a_1Rb_1 \wedge a_2Rb_2.$$

Zeigen Sie:

- (a) R' ist genau dann eine Ordnung, wenn R eine Ordnung ist. (5 Punkte)
- (b) Die Relation R' ist genau dann eine lineare Ordnung, wenn $R = id_A$ und $\|A\| = 1$ ist. (5 Punkte)

Aufgabe 34 Gegeben seien die Digraphen $G_i = (A, R_i), i = 1, 2, 3, 4$: **10 Punkte**



- (a) Geben Sie an, welche der Relationen R_i reflexiv sind. (1 Punkt)
- (b) Geben Sie an, welche der Relationen R_i transitiv sind. (1 Punkt)
- (c) Geben Sie an, welche der Relationen R_i konnex sind. (1 Punkt)
- (d) Geben Sie an, welche der Relationen R_i symmetrisch sind. (1 Punkt)
- (e) Geben Sie an, welche der Relationen R_i gleichzeitig antisymmetrisch und transitiv sind. (1 Punkt)
- (f) Wie erkennt man jede der obigen Eigenschaften einer Relation R anhand einer gegebenen Darstellung als Graph $G = (A, R)$? Erläutern Sie. (5 Punkte)

Hinweis: Gesucht sind Definitionen der Form: „asymmetrisch: R ist genau dann asymmetrisch, wenn G keine Schleifen enthält und zwischen je zwei verschiedenen Knoten u und v höchstens eine der beiden Kanten existiert.“