

Übungsblatt 11

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 17.1.–20. 1. 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 25. 1. 2017*

Essentielle Begriffe: entscheidbar, semi-entscheidbar, charakteristische Funktion χ_L ,
reduzierbar

Abzugeben sind 2 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 77 ; 78

Aufgabe 74 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: *mündlich*

- (1) A ist entscheidbar,
- (2) χ_A ist berechenbar,
- (3) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.
- (4) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 75 Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. *mündlich, optional*
Die *lexikographische Ordnung* $<$ auf Σ^* ist wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \leq |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Eine Funktion $f: \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *monoton*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle Wörter $x \leq y$ gilt.
Eine Sprache A heißt *monoton aufzählbar*, falls A leer oder Bild einer monotonen
berechenbaren Funktion ist. Zeigen Sie:

- (a) Eine Sprache ist genau dann monoton aufzählbar, wenn sie entscheidbar ist.
- (b) Jede unendliche Sprache $A \in \text{RE}$ hat eine unendliche Teilmenge $A' \in \text{REC}$.

Aufgabe 76 Ein k -PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ *mündlich, optional*
arbeitet wie ein PDA mit Endzuständen, verfügt aber über k Kellerspeicher. Falls
 $\Gamma = \{\#, A\}$ gilt und M kein zusätzliches $\#$ auf einen der Keller schreiben darf,
bezeichnen wir M als k -CPDA (für engl. k -Counter-PDA).

- (a) Geben Sie Definitions- und Wertebereich der Überföhrungsfunktion δ an.
- (b) Wie lässt sich eine 1-NTM durch einen 2-PDA simulieren?
- * (c) Wie lässt sich ein PDA durch einen 2-CPDA simulieren?
- * (d) Wie lässt sich ein 2-PDA (und somit auch eine 1-NTM) durch einen 2-CPDA
simulieren?

Aufgabe 77**18 Punkte**

Gelten die folgenden Aussagen für beliebige Sprachen $A \in \text{RE}$ und beliebige Sprachen $B \in \text{REC}$? Begründen Sie.

- (a) $A \cap B \in \text{REC}$, d.h. entscheidbar, (e) $A \setminus B \in \text{REC}$, (i) $B \setminus A \in \text{REC}$,
(b) $A \cap B \notin \text{REC}$, d.h. unentscheidbar, (f) $A \setminus B \notin \text{REC}$, (j) $B \setminus A \notin \text{REC}$,
(c) $A \cap B \in \text{RE}$, d.h. semi-entscheidbar, (g) $A \setminus B \in \text{RE}$, (k) $B \setminus A \in \text{RE}$,
(d) $A \cap B \in \text{co-RE}$, (h) $A \setminus B \in \text{co-RE}$, (l) $B \setminus A \in \text{co-RE}$.
d.h. $\overline{A \cap B}$ ist semi-entscheidbar,

Aufgabe 78 Zeigen Sie:**12 Punkte**

- (a) Die Reduktionsrelation \leq ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch (und somit keine Ordnung). *(mündlich)*
(b) Die Klasse RE ist unter \leq abgeschlossen. *(mündlich)*
(c) Es existiert eine DTM M , die für jede Eingabe der Form $w\#x$ (wobei $w, x \in \{0,1\}^*$) dasselbe ausgibt wie die DTM M_w bei Eingabe x , d.h. es gilt $M(w\#x) = M_w(x)$. *(mündlich)*
(d) Das spezielle Halteproblem K ist RE -vollständig. *(mündlich)*
(e) Für zwei Sprachen A, B gilt $A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$. *(mündlich)*
(f) Eine Sprache A ist genau dann RE -vollständig, wenn ihr Komplement \overline{A} co-RE -vollständig ist. *(4 Punkte)*
(g) Jede Sprache $L \in \text{RE}$ mit $L \leq \overline{L}$ ist entscheidbar. *(4 Punkte)*
(h) Es gibt keine RE -vollständige Sprache, die co-RE -vollständig ist. *(4 Punkte)*