

## Übungsblatt 14

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 2.–5. 2. 2010  
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 9. 2. 2010*

### Aufgabe 110

*mündlich*

- (a) Zeigen Sie, dass NP und co-NP Teilklassen von PSPACE sind.
- (b) Folgern Sie, dass jedes PSPACE-vollständige Problem sowohl NP-hart als auch co-NP-hart ist.

**Aufgabe 111** Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie.

*mündlich*

- (a)  $P = NP \Rightarrow NP = \text{co-NP}$ ,
- (b)  $NP \cup \text{co-NP}$  ist unter Komplement abgeschlossen,
- (c)  $NP \cap \text{co-NP}$  ist unter Komplement, Schnitt und Vereinigung abgeschlossen,
- (d)  $NP \subseteq \text{co-NP} \Leftrightarrow \text{co-NP} \subseteq NP$ ,
- (e) NP enthält keine co-NP-harte Sprache, außer wenn  $NP = \text{co-NP}$  ist.
- (f)  $\text{NPC} = P \Rightarrow \text{EXP} = P$ ,
- (g) NPC ist nicht unter  $\leq^p$  abgeschlossen, außer wenn  $P = NP$  ist,

### Aufgabe 112

*mündlich*

- (a) Überlegen Sie, wie sich ein gegebener regulärer Ausdruck  $\alpha$  in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA  $M$  transformieren lässt.
- (b) Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.
- $\text{LP}_{\text{DFA}}$  (das Leerheitsproblem für DFAs),
  - $\text{AP}_{\text{DFA}}$  (das Ausschöpfungsproblem für DFAs),
  - $\text{ÄP}_{\text{DFA}}$  (das Äquivalenzproblem für DFAs),
  - $\text{SP}_{\text{DFA}}$  (das Schnittproblem für DFAs),
  - $\text{IP}_{\text{DFA}}$  (das Inklusionsproblem für DFAs).
- (c) Welche Klassifikation ergibt sich, wenn die regulären Sprachen nicht durch einen DFA, sondern durch einen (sternfreien) regulären Ausdruck oder durch einen NFA beschrieben werden? Begründen Sie.

### Aufgabe 113

**10 Punkte**

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

- (a) Das Subgraph-Isomorphieproblem SUBGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$ , ob  $G$  isomorph zu einem Subgraphen von  $H$  ist. (*mündlich*)
- (b) Das 2-Färbbarkeitsproblem 2-COLORING. (*mündlich*)
- (c) Entscheide für einen Graphen  $G$  und eine Zahl  $k$ , ob  $G$  eine Clique der Größe  $k$  hat und  $G$   $k$ -färbbar ist. (*mündlich*)
- (d) Entscheide für einen Graphen  $G$  und eine Zahl  $k$ , ob  $G$  eine Clique der Größe  $k + 1$  hat und  $G$   $k$ -färbbar ist. (*mündlich*)
- (e) BOUNDED-PCP: Entscheide für eine PCP-Instanz  $I$  und eine gegebene Unärzahl  $0^k$ , ob  $I$  eine PCP-Lösung der Länge höchstens  $k$  hat. (*mündlich, optional*)
- (f) Entscheide für einen Graphen  $G$  und eine gegebene Clique  $C$  in  $G$ , ob  $C$  die einzige Clique der Größe  $\|C\|$  in  $G$  ist. (**10 Punkte**)

**Aufgabe 114** Zeigen Sie:

**10 Punkte**

- (a)  $A$  ist genau dann NP-vollständig, wenn  $\bar{A}$  co-NP-vollständig ist. (**2 Punkte**)
- (b) SAT liegt genau dann in co-NP, wenn  $NP = \text{co-NP}$  ist. (**2 Punkte**)
- (c) Die Sprache UNSAT der unerfüllbaren booleschen Formeln ist co-NP-vollständig (d. h.  $\text{UNSAT} \in \text{co-NPC}$ ). (**3 Punkte**)
- (d) Die Sprache TAUT der booleschen Formeln, die von allen Belegungen erfüllt werden (so genannte Tautologien) ist ebenfalls co-NP-vollständig. (**3 Punkte**)

### Aufgabe 115

**10+15 Punkte**

Eine KNF-Formel heißt *fast positiv*, falls negative Literale höchstens in Zweierklauseln vorkommen. Zeigen Sie:

- (a) 2-SAT ist in P entscheidbar. (*mündlich*)
- (b) 3-SAT eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, ist NP-vollständig. (*mündlich*)
- (c) 3-SAT eingeschränkt auf fast positive Formeln ist NP-vollständig. (**10 Punkte**)
- \* (d) Eine KNF-Formel, in der jede Klausel mindestens  $k \geq 1$  (verschiedene) Literale enthält und in der jede Variable höchstens  $k$ -mal vorkommt, ist erfüllbar. (*Hinweis*: Benutzen Sie den Heiratssatz.) (**+10 Punkte**)
- (e) Folgern Sie, dass 3-SAT eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable nicht mehr als zweimal vorkommt, in P entscheidbar ist. (**+5 Punkte**)