

Übungsblatt 14

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 2.–5. 2. 2010
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 9. 2. 2010*

Aufgabe 110

mündlich

- (a) Zeigen Sie, dass NP und co-NP Teilklassen von PSPACE sind.
- (b) Folgern Sie, dass jedes PSPACE-vollständige Problem sowohl NP-hart als auch co-NP-hart ist.

Aufgabe 111 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie.

mündlich

- (a) $P = NP \Rightarrow NP = \text{co-NP}$,
- (b) $NP \cup \text{co-NP}$ ist unter Komplement abgeschlossen,
- (c) $NP \cap \text{co-NP}$ ist unter Komplement, Schnitt und Vereinigung abgeschlossen,
- (d) $NP \subseteq \text{co-NP} \Leftrightarrow \text{co-NP} \subseteq NP$,
- (e) NP enthält keine co-NP-harte Sprache, außer wenn $NP = \text{co-NP}$ ist.
- (f) $\text{NPC} = P \Rightarrow \text{EXP} = P$,
- (g) NPC ist nicht unter \leq^p abgeschlossen, außer wenn $P = NP$ ist,

Aufgabe 112

mündlich

- (a) Überlegen Sie, wie sich ein gegebener regulärer Ausdruck α in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA M transformieren lässt.
- (b) Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.
- LP_{DFA} (das Leerheitsproblem für DFAs),
 - AP_{DFA} (das Ausschöpfungsproblem für DFAs),
 - ÄP_{DFA} (das Äquivalenzproblem für DFAs),
 - SP_{DFA} (das Schnittproblem für DFAs),
 - IP_{DFA} (das Inklusionsproblem für DFAs).
- (c) Welche Klassifikation ergibt sich, wenn die regulären Sprachen nicht durch einen DFA, sondern durch einen (sternfreien) regulären Ausdruck oder durch einen NFA beschrieben werden? Begründen Sie.

Aufgabe 113

10 Punkte

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

- (a) Das Subgraph-Isomorphieproblem SUBGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H , ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist. *(mündlich)*
- (b) Das 2-Färbbarkeitsproblem 2-COLORING. *(mündlich)*
- (c) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k , ob G eine Clique der Größe k hat und G k -färbbar ist. *(mündlich)*
- (d) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k , ob G eine Clique der Größe $k + 1$ hat und G k -färbbar ist. *(mündlich)*
- (e) BOUNDED-PCP: Entscheide für eine PCP-Instanz I und eine gegebene Unärzahl 0^k , ob I eine PCP-Lösung der Länge höchstens k hat. *(mündlich, optional)*
- (f) Entscheide für einen Graphen G und eine gegebene Clique C in G , ob C die einzige Clique der Größe $\|C\|$ in G ist. *(10 Punkte)*

Aufgabe 114 Zeigen Sie:

10 Punkte

- (a) A ist genau dann NP-vollständig, wenn \bar{A} co-NP-vollständig ist. *(2 Punkte)*
- (b) SAT liegt genau dann in co-NP, wenn $NP = \text{co-NP}$ ist. *(2 Punkte)*
- (c) Die Sprache UNSAT der unerfüllbaren booleschen Formeln ist co-NP-vollständig (d. h. $\text{UNSAT} \in \text{co-NPC}$). *(3 Punkte)*
- (d) Die Sprache TAUT der booleschen Formeln, die von allen Belegungen erfüllt werden (so genannte Tautologien) ist ebenfalls co-NP-vollständig. *(3 Punkte)*

Aufgabe 115

10+15 Punkte

Eine KNF-Formel heißt *fast positiv*, falls negative Literale höchstens in Zweierklauseln vorkommen. Zeigen Sie:

- (a) 2-SAT ist in P entscheidbar. *(mündlich)*
- (b) 3-SAT eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, ist NP-vollständig. *(mündlich)*
- (c) 3-SAT eingeschränkt auf fast positive Formeln ist NP-vollständig. *(10 Punkte)*
- * (d) Eine KNF-Formel, in der jede Klausel mindestens $k \geq 1$ (verschiedene) Literale enthält und in der jede Variable höchstens k -mal vorkommt, ist erfüllbar. *(Hinweis: Benutzen Sie den Heiratssatz.) (+10 Punkte)*
- (e) Folgern Sie, dass 3-SAT eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable nicht mehr als zweimal vorkommt, in P entscheidbar ist. *(+5 Punkte)*