Vorlesungsskript

Kryptologie 1

Wintersemester 05/06

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

29. Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Klassische Verfahren

1.1 Einführung

Kryptosysteme (Verschlüsselungsverfahren) dienen der Geheimhaltung von Nachrichten bzw. Daten. Hierzu gibt es auch andere Methoden wie z.B.

Physikalische Maßnahmen: Tresor etc.

Organisatorische Maßnahmen: einsamer Waldspaziergang etc.

Steganographische Maßnahmen: unsichtbare Tinte etc.

Andererseits können durch kryptographische Verfahren weitere **Schutzziele** realisiert werden.

- *Vertraulichkeit*
  - Geheimhaltung
  - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
  - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- *Integrität*
  - von Nachrichten und Daten
- *Zurechenbarkeit*
  - Authentikation
  - Unabstreitbarkeit
  - Identifizierung
- *Verfügbarkeit*
  - von Daten
  - von Rechenressourcen

– von Informationsdienstleistungen

In das Umfeld der Kryptographie fallen auch die folgenden Begriffe.

Kryptographie: Lehre von der Geheimhaltung von Informationen durch die Verschlüsselung von Daten. Im weiteren Sinne: Wissenschaft von der Übermittlung, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einer von potentiellen Gegnern bedrohten Umgebung.

Kryptoanalysis: Erforschung der Methoden eines unbefugten Angriffs gegen ein Kryptoverfahren (Zweck: Vereitelung der mit seinem Einsatz verfolgten Ziele)

Kryptoanalyse: Analyse eines Kryptoverfahrens zum Zweck der Bewertung seiner kryptographischen Stärken bzw. Schwächen.

Kryptologie: Wissenschaft vom Entwurf, der Anwendung und der Analyse von kryptographischen Verfahren (umfasst Kryptographie und Kryptoanalyse).

1.2 Kryptosysteme

Es ist wichtig, Kryptosysteme von Codesystemen zu unterscheiden.

Codesysteme

– operieren auf semantischen Einheiten,

– starre Festlegung, welche Zeichenfolge wie zu ersetzen ist.

Beispiel 1.1 (Ausschnitt aus einem Codebuch der deutschen Luftwaffe)

xve	**Bis auf weiteres Wettermeldung gemäß Funkbefehl testen**
yde	**Frage**
sLk	**Befehl**
fin	**beendet**
eom	**eigene Maschinen**

Kryptosysteme

- operieren auf syntaktischen Einheiten,
- flexibler Mechanismus durch Schlüsselvereinbarung

Definition 2 (**Alphabet**)

Ein ***Alphabet*** ist eine geordnete endliche Menge $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ von ***Zeichen***. Eine Folge $x = x_1 \ldots x_n \in A^n$ heißt ***Wort*** (der ***Länge*** n). $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.

Beispiel 1.3 Das ***lateinische Alphabet*** A_{lat} enthält die 26 Buchstaben `A, ..., Z`. Bei der Abfassung von Klartexten wurde meist auf den Gebrauch von Interpunktions- und Leerzeichen sowie auf Groß- und Kleinschreibung verzichtet ($\leadsto$ Verringerung der Redundanz im Klartext).

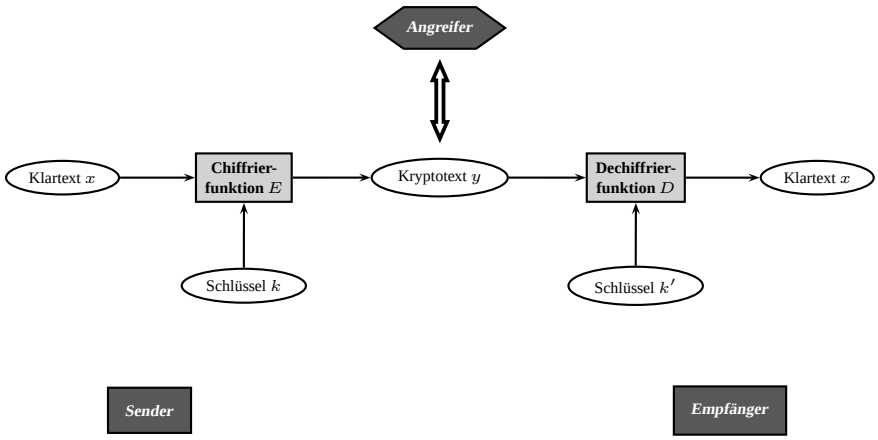
Definition 4 (**Kryptosystem**)

Ein **Kryptosystem** wird durch folgende Komponenten beschrieben:

- A, das **Klartextalphabet**,
- B, das **Kryptotextalphabet**,
- K, der **Schlüsselraum** (*key space*),
- $M \subseteq A^*$, der **Klartextraum** (*message space*),
- $C \subseteq B^*$, der **Kryptotextraum** (*ciphertext space*),
- $E : K \times M \to C$, die **Verschlüsselungsfunktion** (*encryption function*),
- $D : K \times C \to M$, die **Entschlüsselungsfunktion** (*decryption function*) und
- $S \subseteq K \times K$, eine Menge von Schlüsselpaaren (k, k') mit der Eigenschaft, dass für jeden Klartext $x \in M$ folgende Beziehung gilt:

$$D(k', E(k, x)) = x \tag{1.1}$$

Bei symmetrischen Kryptosystemen ist $S = \{(k, k) \mid k \in K\}$, weshalb wir in diesem Fall auf die Angabe von S verzichten können.



Zu jedem Schlüssel $k \in K$ korrespondiert also eine **Chiffrierfunktion** $E_k : x \mapsto E(k, x)$ und eine **Dechiffrierfunktion** $D_k : y \mapsto D(k, y)$. Die Gesamtheit dieser Abbildungen wird auch **Chiffre** (englisch *cipher*) genannt. (Daneben wird der Begriff „Chiffre“ auch als Bezeichnung für einzelne Kryptotextzeichen oder kleinere Kryptotextsequenzen verwendet.)

Lemma 1.5 *Für jedes Paar $(k, k') \in S$ ist die Chiffrierfunktion E_k injektiv.*

Beweis Angenommen, für zwei unterschiedliche Klartexte $x_1 \neq x_2$ ist $E(k, x_1) = E(k, x_2)$. Dann folgt

$$D(k', E(k, x_1)) = D(k', E(k, x_2)) \overset{(1.1)}{=} x_2 \neq x_1,$$

im Widerspruch zu (1.1). ■

1.3 Die affine Chiffre

Die Moduloarithmetik erlaubt es uns, das Klartextalphabet mit einer Addition und Multiplikation auszustatten.

Definition 6 (**teilt-Relation, modulare Kongruenz**)

Seien a, b, m ganze Zahlen mit $m \geq 1$. Die Zahl a ***teilt*** b (kurz: $a|b$), falls ein $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b = ad$. Teilt m die Differenz $a - b$, so schreiben wir hierfür

$$a \equiv_m b$$

(in Worten: a ist ***kongruent*** zu b modulo m). Weiterhin bezeichne

$$a \bmod m = \min\{a - dm \geq 0 \mid d \in \mathbb{Z}\}$$

den bei der Ganzzahldivision von a durch m auftretenden ***Rest***, also diejenige ganze Zahl $r \in \{0, \ldots, m-1\}$, für die eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a = dm + r$.

Die auf $\mathbb{Z}$ definierten Operationen

$$a \oplus_m b := (a + b) \bmod m$$

und

$$a \odot_m b := ab \bmod m.$$

sind abgeschlossen auf $\mathbb{Z}_m = \{0, \ldots, m-1\}$ und bilden auf dieser Menge einen kommutativen Ring mit Einselement, den sogenannten **Restklassenring** modulo m. Für $a \oplus_m -b$ schreiben wir auch $a \ominus_m b$.

Definition 7 (**Buchstabenrechnung**)

Sei $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ein Alphabet. Für Indizes $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ und eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{array}{lll} a_i + a_j = a_{i \oplus_m j}, & a_i - a_j = a_{i \ominus_m j}, & a_i a_j = a_{i \odot_m j}, \\ a_i + z \ = a_{i \oplus_m z}, & a_i - z \ = a_{i \ominus_m z}, & z a_j \ = a_{z \odot_m j}. \end{array}$$

Wir rechnen also mit Buchstaben, indem wir sie mit ihren Indizes identifizieren und die Rechnung modulo m ausführen. Mit Hilfe dieser Notation lässt sich die Verschiebechiffre, die auch als additive Chiffre bezeichnet wird, leicht beschreiben.

Definition 8 (**additive Chiffre**)

Bei der ***additiven Chiffre*** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \{1, \ldots, m-1\}$. Für $k \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = x + k \ \text{ und } \ D(c, y) = y - k.$$

Im Fall des lateinischen Alphabets führt der Schlüssel $k = 13$ auf eine interessante Chiffrierfunktion, die in UNIX-Umgebungen auch unter der Bezeichnung ROT13 bekannt ist. Natürlich kann mit dieser Substitution nicht ernsthaft die Vertraulichkeit von Nachrichten geschützt werden. Vielmehr soll durch sie ein unbeabsichtigtes Mitlesen – etwa von Rätsellösungen – verhindert werden.

ROT13 ist eine ***involutorische*** – also zu sich selbst inverse – Abbildung, d.h. für alle $x \in A$ gilt

$$\text{ROT13}(\text{ROT13}(x)) = x.$$

Tabelle 1.1: Werte der additiven Chiffrierfunktion ROT13 (Schlüssel $k = 13$).

x	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
$E(13, x)$	*N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M*

Da ROT13 zudem keinen Buchstaben auf sich selbst abbildet, ist sie sogar eine echt involutorische Abbildung.

Die Buchstabenrechnung legt folgende Modifikation der Caesar-Chiffre nahe: Anstatt auf jeden Klartextbuchstaben den Schlüsselwert k zu addieren, können wir die Klartextbuchstaben auch mit k multiplizieren. Allerdings erhalten wir hierbei nicht für jeden Wert von k eine injektive Chiffrierfunktion. So bildet etwa die Funktion $g : A_{lat} \to A_{lat}$ mit $g(x) = 2x$ sowohl A als auch N auf den Buchstaben $g(\mathsf{A}) = g(\mathsf{N}) = \mathit{A}$ ab. Um die vom Schlüsselwert k zu erfüllende Bedingung angeben zu können, führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 9 (ggT, kgV, teilerfremd)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ teilt die beiden Zahlen } a \text{ und } b\}$$

der ***größte gemeinsame Teiler*** von a und b. Für $a \neq 0, b \neq 0$ ist

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \min\{d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 1 \text{ und die beiden Zahlen } a \text{ und } b \text{ teilen } d\}$$

das ***kleinste gemeinsame Vielfache*** von a und b. Ist $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so nennt man a und b ***teilerfremd***.

Euklidscher Algorithmus: Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b lässt sich wie folgt bestimmen.

O. B. d. A. sei $a > b > 0$. Bestimme die natürlichen Zahlen (durch Divsision mit Rest):

$$r_0 = a > r_1 = b > r_2 > \cdots > r_n > r_{n+1} = 0 \quad \text{und} \quad d_2, d_3, \ldots d_{n+1}$$

mit

$$r_{i-1} = d_{i+1} r_i + r_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.^*$$

*Also: $d_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1}$ und $r_i = r_{i-2} \bmod r_{i-1}$.

Hierzu sind n Divisionsschritte erforderlich. Wegen

$$\mathrm{ggT}(r_{i-1}, r_i) = \mathrm{ggT}(r_i, \underbrace{r_{i-1} - d_{i+1} r_i}_{r_{i+1}})$$

folgt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(r_n, r_{n+1}) = r_n$.

Beispiel 1.10

Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1}\cdot$	r_i	$+$	r_{i+1}
1	693	$=$	4	$\cdot 147$	$+$	105
2	147	$=$	1	$\cdot 105$	$+$	42
3	105	$=$	2	$\cdot$ 42	$+$	21
4	42	$=$	2	$\cdot$ **21**	$+$	0

und damit $\mathrm{ggT}(693, 147) = r_4 = 21$.

Der Euklidsche Algorithmus lässt sich sowohl iterativ als auch rekursiv implementieren.

Algorithmus 1.11 $\textsc{Euklid}_{it}(a, b)$

```
1  repeat
2    r ← a mod b
3    a ← b
4    b ← r
5  until r = 0
6  return a
```

Algorithmus 1.12 $\textsc{Euklid}_{rek}(a, b)$

```
1  if b = 0 then
2    return a
3  else
4    return EUKLID(b, a mod b)
5  end
```

Zur Abschätzung von n verwenden wir die Folge der Fibonacci-Zahlen f_n:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Durch Induktion über $i = n, n-1, \ldots, 0$ folgt $r_i \geq f_{n+1-i}$; also $a \geq f_{n+1}$. Wegen $f_n \geq \Re^n$ (wobei $\Re = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; Beweis durch Induktion) ist dann $a \geq \Re^n$, d. h. $n \leq \log_{\Re} a$.

Theorem 1.13 *Der Euklidsche Algorithmus führt zur Berechnung von* $\mathrm{ggT}(a, b)$ *(unter der Annahme* $a > b > 0$*) höchstens* $\lfloor \log_R a \rfloor + 1$ *Divisionsschritte durch. Dies führt auf eine Zeitkomplexität von* $O(n^3)$*, wobei* n *die Länge der Eingabe in Binärdarstellung bezeichnet und wir* $O(n^2)$ *Rechenschritte für eine einzelne Ganzzahldivision ansetzen.*

Erweiterter Euklidscher bzw. **Berlekamp-Algorithmus:** Der Euklidsche Algorithmus kann so modifiziert werden, dass er eine lineare Darstellung

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{Z}$$

des ggT liefert (Zeitkomplexität ebenfalls $O(n^3)$). Hierzu werden neben r_i und d_i weitere Zahlen

$$p_i = p_{i-2} - d_i p_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad p_0 = 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 0,$$

und

$$q_i = q_{i-2} - d_i q_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad q_0 = 0 \quad \text{und} \quad q_1 = 1,$$

für $i = 0, \ldots, n$ bestimmt. Dann gilt für $i = 0$ und $i = 1$,

$$ap_i + bq_i = r_i,$$

und durch Induktion über i,

$$\begin{aligned} ap_{i+1} + bq_{i+1} &= a(p_{i-1} - d_{i+1}p_i) + b(q_{i-1} - d_{i+1}q_i) \\ &= ap_{i-1} + bq_{i-1} - d_{i+1}(ap_i + bq_i) \\ &= (r_{i-1} - d_{i+1}r_i) \\ &= r_{i+1} \end{aligned}$$

zeigt man, dass dies auch für $i = 2, \ldots, n$ gilt. Insbesondere gilt also

$$ap_n + bq_n = r_n = \mathrm{ggT}(a,b).$$

Korollar 1.14 (Lemma von Bezout) *Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist in der Form*

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \lambda a + \mu b \quad \textit{mit} \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{Z}$$

darstellbar.

Beispiel 1.15 Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir wegen

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1}\cdot$	r_i	$+$	r_{i+1}	p_i	q_i	$p_i\cdot 693 +$	$q_i\cdot 147 =$	r_i
0							1	0	$1\cdot 693 +$	$0\cdot 147 =$	693
1	693	$=$	4	$\cdot 147$	$+$	105	0	1	$0\cdot 693 +$	$1\cdot 147 =$	147
2	147	$=$	1	$\cdot 105$	$+$	42	1	-4	$1\cdot 693 -$	$4\cdot 147 =$	105
3	105	$=$	2	$\cdot$ 42	$+$	21	-1	5	$-1\cdot 693 +$	$5\cdot 147 =$	42
4	42	$=$	2	$\cdot$ **21**	$+$	0	**3**	**-14**	$\mathbf{3}\cdot 693 -$	$\mathbf{14}\cdot 147 =$	21

die lineare Darstellung $3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 = 21$.

Aus der linearen Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers ergeben sich eine Reihe von nützlichen Schlussfolgerungen.

Korollar 1.16

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \min\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis Sei $m = \min\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$ und $g = \mathrm{ggT}(a,b)$. Dann folgt $g \geq m$, da g in der Menge $\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$ enthalten ist, und $g \leq m$, da g Teiler von jeder Zahl der Form $\lambda a + \mu b$ ist. ■

Korollar 1.17 *Der größte gemeinsame Teiler von a und b wird von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt,*

$$x|a \ \wedge \ x|b \quad \Rightarrow \quad x|\,\mathrm{ggT}(a,b).$$

Beweis Sei $g = \mathrm{ggT}(a,b)$. Dann existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = g$. Da x nach Voraussetzung sowohl a als auch b teilt, teilt x auch die Zahlen μa und λb und somit auch deren Summe $\mu a + \lambda b = g$. ■

Korollar 1.18 (Lemma von Euklid) *Teilt a das Produkt bc und sind a, b teilerfremd, so ist a auch Teiler von c,*

$$a|bc \ \wedge \ \mathrm{ggT}(a,b) = 1 \quad \Rightarrow \quad a|c.$$

Beweis Wegen $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = 1$. Da a nach Voraussetzung das Produkt bc teilt, muss a auch $c\mu a + c\lambda b = c$ teilen. ■

Korollar 1.19 *Wenn sowohl a als auch b zu einer Zahl $m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind, so ist auch das Produkt ab teilerfremd zu m,*

$$\mathrm{ggT}(a,m) = \mathrm{ggT}(b,m) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(ab,\ m) = 1.$$

Beweis Da a und b teilerfremd zu m sind, existieren Zahlen $\mu, \lambda, \mu', \lambda' \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda m = \mu' b + \lambda' m = 1$. Somit ergibt sich aus der Darstellung

$$1 = (\mu a + \lambda m)(\mu' b + \lambda' m) = \underbrace{\mu\mu'}_{\mu''} ab + \underbrace{(\mu a \lambda' + \mu' b \lambda + \lambda \lambda' m)}_{\lambda''} m,$$

dass auch ab teilerfremd zu m ist. ■

Damit nun eine Abbildung $g : A \to A$ von der Bauart $g(x) = bx$ injektiv (oder gleichbedeutend, surjektiv) ist, muss es zu jedem Buchstaben $y \in A$ genau einen Buchstaben $x \in A$ mit $bx = y$ geben. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn b und m teilerfremd sind.

Satz 1.20 *Sei $m \geq 1$. Die lineare Kongruenzgleichung $bx \equiv_m y$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $x \in \{0, \ldots, m-1\}$, wenn $\mathrm{ggT}(b, m) = 1$ ist.*

Beweis Angenommen, $\mathrm{ggT}(b, m) = g > 1$. Dann ist mit x auch $x' = x + m/g$ eine Lösung von $bx \equiv_m y$ mit $x \not\equiv_m x'$. Gilt umgekehrt $\mathrm{ggT}(b, m) = 1$, so folgt aus den Kongruenzen

$$bx_1 \equiv_m y$$

und

$$bx_2 \equiv_m y$$

sofort $b(x_1 - x_2) \equiv_m 0$, also $m | b(x_1 - x_2)$. Wegen $\mathrm{ggT}(b, m) = 1$ folgt mit dem Lemma von Euklid $m | (x_1 - x_2)$, also $x_1 \equiv_m x_2$.

Dies zeigt, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ mit $f(x) = bx \bmod m$ injektiv ist. Da jedoch Definitions- und Wertebereich von f identisch sind, muss f dann auch surjektiv sein. Dies impliziert, dass die Kongruenz $bx \equiv_m y$ für jedes $y \in \mathbb{Z}_m$ lösbar ist. ■

Korollar 1.21 *Im Fall $\mathrm{ggT}(b, m) = 1$ hat die Kongruenz $bx \equiv_m 1$ genau eine Lösung, die das **multiplikative Inverse** von b modulo m genannt und mit $b^{-1} \bmod m$ (oder einfach mit b^{-1}) bezeichnet wird. Die invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_m$ werden in der Menge*

$$\mathbb{Z}_m^* = \{b \in \mathbb{Z}_m \mid \mathrm{ggT}(b, m) = 1\}$$

zusammengefasst.

Korollar 1.19 zeigt, dass $\mathbb{Z}_m^*$ unter der Operation $\odot_m$ abgeschlossen ist, und mit Korollar 1.21 folgt, dass $(\mathbb{Z}_m^*, \odot_m)$ eine multiplikative Gruppe bildet.

Das multiplikative Inverse von b modulo m ergibt sich aus der linearen Darstellung $\lambda b + \mu m = \mathrm{ggT}(b, m) = 1$ zu $b^{-1} = \lambda \bmod m$. Bei Kenntnis von b^{-1} kann die Kongruenz $bx \equiv_m y$ leicht zu $x = yb^{-1} \bmod m$ gelöst werden. Die folgende Tabelle zeigt die multiplikativen Inversen b^{-1} für alle $b \in \mathbb{Z}_{26}^*$.

b	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
b^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Nun lässt sich die additive Chiffre leicht zur affinen Chiffre erweitern.

Definition 22 (**affine Chiffre**)

Bei der ***affinen Chiffre*** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$. Für $k = (b, c) \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = bx + c \text{ und } D(k, y) = b^{-1}(y - c).$$

In diesem Fall liefert die Schlüsselkomponente $b = -1$ für jeden Wert von c eine involutorische Chiffrierfunktion $x \mapsto E(b, c; x) = c - x$ (**verschobenes komplementäres Alphabet**). Wählen wir für c ebenfalls den Wert -1, so ergibt sich die Chiffrierfunktion $x \mapsto -x - 1$, die auch als **revertiertes Alphabet** bekannt ist. Offenbar ist diese Funktion genau dann echt involutorisch, wenn m gerade ist.

x	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
$-x-1$	*Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B A*

Als nächstes illustrieren wir die Ver- und Entschlüsselung mit der affinen Chiffre an einem kleinen Beispiel.

Beispiel 1.23 (affine Chiffre)

Sei $A = \{\mathsf{A}, \ldots, \mathsf{Z}\} = B$, also $m = 26$. Weiter sei $k = (9, 2)$, also $b = 9$ und $c = 2$. Um den Klartextbuchstaben $x = \mathsf{F}$ zu verschlüsseln, berechnen wir

$$E(k, x) = bx + c = 9\mathsf{F} + 2 = \mathsf{V},$$

da der Index von F gleich 5, der von V gleich 21 und $9 \cdot 5 + 2 = 47 \equiv_{26} 21$ ist. Um einen Kryptotextbuchstaben wieder entschlüsseln zu können, benötigen wir das multiplikative Inverse von $b = 9$, das sich wegen

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1} \cdot r_i$	$+$	r_{i+1}	$p_i \cdot 26$	$+$	$q_i \cdot 9$	$=$	r_i
0						$1 \cdot 26$	$+$	$0 \cdot 9$	$=$	26
1	26	$=$	$2 \cdot 9$	$+$	8	$0 \cdot 26$	$+$	$1 \cdot 9$	$=$	9
2	9	$=$	$1 \cdot 8$	$+$	1	$1 \cdot 26$	$+$	$(-2) \cdot 9$	$=$	8
3	8	$=$	$8 \cdot \mathbf{1}$	$+$	0	$(-1) \cdot 26$	$+$	$\mathbf{3} \cdot 9$	$=$	1

zu $b^{-1} = q_3 = 3$ ergibt. Damit erhalten wir für den Kryptotextbuchstaben $y = \mathsf{V}$ den ursprünglichen Klartextbuchstaben

$$D(k, y) = b^{-1}(y - c) = 3(\mathsf{V} - 2) = \mathsf{F}$$

zurück, da $3 \cdot 19 = 57 \equiv_{26} 5$ ist.

Eine wichtige Rolle spielt die Funktion

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \varphi(n) = \|\mathbb{Z}_n^*\| = \|\{a \mid 0 \le a \le n-1,\ \mathrm{ggT}(a, n) = 1\}\|,$$

die sogenannte *Eulersche φ-Funktion*.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbb{Z}_n^*$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1,\cdots,6\}$	$\{1,3,5,7\}$	$\{1,2,4,5,7,8\}$
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6

Wegen

$$\mathbb{Z}_{p^e} - \mathbb{Z}_{p^e}^* = \{0, p, 2p, \ldots, (p^{e-1}-1)p\}$$

folgt sofort

$$\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^{e-1}(p-1).$$

Um hieraus für beliebige Zahlen $m \in \mathbb{N}$ eine Formel für $\varphi(m)$ zu erhalten, genügt es, $\varphi(ab)$ im Fall $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ in Abhängigkeit von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{ml} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$ mit

$$f(x) := (x \bmod m, x \bmod l).$$

Beispiel 1.24

Sei $m = 5$ und $l = 6$. Dann erhalten wir die Funktion $f : \mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ mit

x	0	**1**	2	3	4	5	6	**7**	8	9
$f(x)$	$(0,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(\mathbf{2},2)$	$(\mathbf{3},3)$	$(\mathbf{4},4)$	$(0,\mathbf{5})$	$(\mathbf{1},0)$	$(\mathbf{2},\mathbf{1})$	$(\mathbf{3},2)$	$(\mathbf{4},3)$

x	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
$f(x)$	$(0,4)$	$(\mathbf{1},\mathbf{5})$	$(\mathbf{2},0)$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})$	$(\mathbf{4},2)$	$(0,3)$	$(\mathbf{1},4)$	$(\mathbf{2},\mathbf{5})$	$(\mathbf{3},0)$	$(\mathbf{4},\mathbf{1})$

x	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
$f(x)$	$(0,2)$	$(\mathbf{1},3)$	$(\mathbf{2},4)$	$(\mathbf{3},\mathbf{5})$	$(\mathbf{4},0)$	$(0,\mathbf{1})$	$(\mathbf{1},2)$	$(\mathbf{2},3)$	$(\mathbf{3},4)$	$(\mathbf{4},\mathbf{5})$

Man beachte, dass f eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}_{30}$ und $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ ist. Zudem fällt auf, dass ein x-Wert genau dann in $\mathbb{Z}_{30}^*$ liegt, wenn der Funktionswert $f(x) = (y,z)$ zu $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ gehört (die Werte $x \in \mathbb{Z}_{30}^*$, $y \in \mathbb{Z}_5^*$ und $z \in \mathbb{Z}_6^*$ sind **fett** gedruckt). Folglich bildet f die Argumente in $\mathbb{Z}_{30}^*$ bijektiv auf die Werte in $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ ab. Für f^{-1} erhalten wir somit folgende Tabelle:

f^{-1}	0	**1**	2	3	4	**5**
0	0	25	20	15	10	5
1	6	**1**	26	21	16	**11**
2	12	**7**	2	27	22	**17**
3	18	**13**	8	3	28	**23**
4	24	**19**	14	9	4	**29**

◁

Der Chinesische Restsatz, den wir im nächsten Abschnitt beweisen, besagt, dass f im Fall $\mathrm{ggT}(m,l) = 1$ bijektiv und damit invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(x, ml) = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{ggT}(x,m) = \mathrm{ggT}(x,l) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{ggT}(x \bmod m, m) = \mathrm{ggT}(x \bmod l, l) = 1 \end{aligned}$$

ist daher die Einschränkung $\hat{f}$ von f auf den Bereich $\mathbb{Z}_{ml}^*$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}_{ml}^*$ und $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*$, d.h. es gilt

$$\varphi(ml) = \|\mathbb{Z}_{ml}^*\| = \|\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*\| = \|\mathbb{Z}_m^*\| \cdot \|\mathbb{Z}_l^*\| = \varphi(m)\varphi(l).$$

Theorem 1.25 *Die Eulersche φ-Funktion ist multiplikativ, d. h. für teilerfremde Zahlen m und l gilt $\varphi(ml) = \varphi(m)\varphi(l)$.*

Korollar 1.26 *Sei $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von m. Dann gilt*

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i-1}(p_i - 1) = m \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)/p_i.$$

Beweis Es gilt

$$\varphi(\textstyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i-1}(p_i - 1).$$

■

Der Chinesische Restsatz

Die beiden linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv_3 0 \\ x &\equiv_6 1 \end{aligned}$$

besitzen je eine Lösung, es gibt aber kein x, das beide Kongruenzen gleichzeitig erfüllt. Der nächste Satz zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen gemeinsame Lösungen existieren, und wie sie berechnet werden können.

Theorem 1.27 (Chinesischer Restsatz) *Falls $m_1, \ldots, m_k$ paarweise teilerfremd sind, dann hat das System*

$$\begin{aligned} x &\equiv_{m_1} b_1 \\ &\vdots \\ x &\equiv_{m_k} b_k \end{aligned} \tag{1.2}$$

genau eine Lösung modulo $m = \prod_{i=1}^{k} m_i$.

Beweis Da die Zahlen $n_i = {}^{m}/_{m_i}$ teilerfremd zu m_i sind, existieren Zahlen μ_i und λ_i mit

$$\mu_i n_i + \lambda_i m_i = \mathrm{ggT}(n_i, m_i) = 1.$$

Dann gilt

$$\mu_i n_i \equiv_{m_i} 1$$

und

$$\mu_i n_i \equiv_{m_j} 0$$

für $j \neq i$. Folglich erfüllt $x = \sum_{j=1}^{k} \mu_j n_j b_j$ die Kongruenzen

$$x \equiv_{m_i} \mu_i n_i b_i \equiv_{m_i} b_i$$

für $i = 1, \ldots, k$. Dies zeigt, dass (1.2) lösbar, also die Funktion

$$f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

mit $f(x) = (x \bmod m_1, \ldots, x \bmod m_k)$ surjektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von f die gleiche Mächtigkeit haben, muss f jedoch auch injektiv sein, d.h. (1.2) ist sogar eindeutig lösbar. ■

Man beachte, dass der Beweis des Chinesischen Restsatzes konstruktiv ist und die Lösung x unter Verwendung des erweiterten Euklidschen Algorithmus' effizient berechenbar ist.

1.4 Die Hill-Chiffre

Die von Hill im Jahr 1929 publizierte Chiffre ist eine Erweiterung der multiplikativen Chiffre auf Buchstabenblöcke, d.h. der Klartext wird nicht zeichenweise, sondern blockweise verarbeitet. Sowohl der Klartext- als auch der Kryptotextraum enthält alle Wörter x über A einer festen Länge l. Zur Chiffrierung wird eine $(l \times l)$-Matrix $k = (k_{ij})$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_m$ benutzt, die einen Klartextblock $x = x_1 \ldots x_l \in A^l$ in den Kryptotextblock $y_1 \ldots y_l \in A^l$ transformiert, wobei

$$y_i = x_1 k_{1i} + \cdots + x_l k_{li},\ i = 1, \ldots, l$$

ist (hierbei machen wir von der Buchstabenrechnung Gebrauch). y entsteht also durch Multiplikation von x mit der Schlüsselmatrix k:

$$(x_1, \cdots, x_l) \begin{pmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} & \ldots & k_{ll} \end{pmatrix} = (y_1, \cdots, y_l)$$

Wir bezeichnen die Menge aller $(l \times l)$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_m$ mit $\mathbb{Z}_m^{l\times l}$. Als Schlüssel können nur invertierbare Matrizen k benutzt werden, da sonst der Chiffriervorgang nicht injektiv ist. k ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von k teilerfremd zu m ist (siehe Übungen).

Definition 28 (**Determinante**)

Sei $A = (a_{ij})$ eine $l \times l$-Matrix. Für $1 \leq i, j \leq l$ sei A_{ij} die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus K hervorgehende Matrix. Die ***Determinante*** von A ist dann $\det(A) = a_{11}$, falls $l = 1$, und

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

wobei $i \in \{1, \cdots, l\}$ (beliebig wählbar) ist.

Für die Dechiffrierung wird die zu k inverse Matrix k^{-1} benötigt, wofür effiziente Algorithmen bekannt sind (siehe Übungen).

Satz 1.29 *Sei A ein Alphabet und sei $k \in \mathbb{Z}_m^{l\times l}$ ($l \geq 1$, $m = \|A\|$). Die Abbildung $f : A^l \to A^l$ mit*

$$f(x) = xk,$$

ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{ggT}(\det(k), m) = 1$ ist.

Beweis Siehe Übungen. ■

Definition 30 (**Hill-Chiffre**)

Sei $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl $l \geq 2$ sei $M = C = A^l$. Bei der **Hill-Chiffre** ist $K = \{k \in \mathbb{Z}_m^{l\times l} \mid \mathrm{ggT}(\det(k), m) = 1\}$ und es gilt

$$E(k, x) = xk \text{ und } D(k, y) = yk^{-1}.$$

Beispiel 1.31 (Hill-Chiffre)

Benutzen wir zur Chiffrierung von Klartextblöcken der Länge $l = 4$ über dem lateinischen Alphabet A_{lat} die Schlüsselmatrix

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir beispielsweise für den Klartext HILL wegen

$$(\mathtt{HILL}) \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix} = (\mathit{NERX}) \text{ bzw. } \begin{array}{r} 11\,\mathtt{H} + 24\,\mathtt{I} + 18\,\mathtt{L} + 6\,\mathtt{L} = \mathit{N} \\ 13\,\mathtt{H} + 17\,\mathtt{I} + 12\,\mathtt{L} + 15\,\mathtt{L} = \mathit{E} \\ 8\,\mathtt{H} + 3\,\mathtt{I} + 23\,\mathtt{L} + 2\,\mathtt{L} = \mathit{R} \\ 21\,\mathtt{H} + 25\,\mathtt{I} + 17\,\mathtt{L} + 15\,\mathtt{L} = \mathit{X} \end{array}$$

den Kryptotext $E(k, \mathtt{HILL}) = \mathit{NERX}$. Für die Entschlüsselung wird die inverse Matrix k^{-1} benötigt. Diese wird in den Übungen berechnet.

1.5 Die Vigenère-Chiffre und andere Stromsysteme

Bei der nach dem Franzosen Blaise de Vigenère (1523–1596) benannten Chiffre werden zwar nur einzelne Buchstaben chiffriert, aber je nach Position im Klartext unterschiedlich.

Definition 32 (Vigenère-Chiffre)

Sei $A = B$ ein beliebiges Alphabet. Die **Vigenère-Chiffre** chiffriert unter einem Schlüssel $k = k_0 \dots k_{d-1} \in K = A^*$ einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$ beliebiger Länge zu

$$E(k, x) = y_0 \dots y_{n-1}, \text{ wobei } y_i = x_i + k_{(i \bmod d)} \text{ ist,}$$

und dechiffriert einen Kryptotext $y = y_0 \dots y_{n-1}$ zu

$$D(k, y) = x_0 \dots x_{n-1}, \text{ wobei } x_i = y_i - k_{(i \bmod d)} \text{ ist.}$$

Beispiel 1.33 (Vigenère-Chiffre)

Verwenden wir das lateinische Alphabet A_{lat} als Klartextalpabet und wählen wir als Schlüssel das Wort $k = \mathit{WIE}$, so ergibt sich für den Klartext VIGENERE beispielsweise der Kryptotext

$$\begin{aligned} E(\mathit{WIE}, \mathtt{VIGENERE}) &= \underbrace{\mathtt{V}+\mathit{W}}_{\mathit{R}}\ \underbrace{\mathtt{I}+\mathit{I}}_{\mathit{Q}}\ \underbrace{\mathtt{G}+\mathit{E}}_{\mathit{K}}\ \underbrace{\mathtt{E}+\mathit{W}}_{\mathit{A}}\ \underbrace{\mathtt{N}+\mathit{I}}_{\mathit{V}}\ \underbrace{\mathtt{E}+\mathit{E}}_{\mathit{I}}\ \underbrace{\mathtt{R}+\mathit{W}}_{\mathit{N}}\ \underbrace{\mathtt{E}+\mathit{I}}_{\mathit{M}} \\ &= \mathit{RQKAVINM} \end{aligned}$$

Um einen Klartext x zu verschlüsseln, wird also das Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ so oft wiederholt, bis der dabei entstehende **Schlüsselstrom** $\hat{k} = k_0, k_1, \dots, k_{d-1}, k_0 \dots$ die Länge von x erreicht. Dann werden x und $\hat{k}$ zeichenweise addiert, um den zugehörigen Kryptotext y zu bilden. Aus diesem kann der ursprüngliche Klartext x zurückgewonnen werden, indem man den Schlüsselstrom $\hat{k}$ wieder subtrahiert.

Beispiel 1.33 ((Vigenère-Chiffre, Fortsetzung))

Chiffrierung:			Dechiffrierung:		
	VIGENERE	(Klartext x)		*RQKAVINM*	(Kryptotext y)
$+$	*WIEWIEWI*	(Schlüsselstrom $\hat{k}$)	$-$	*WIEWIEWI*	(Schlüsselstrom $\hat{k}$)
	RQKAVINM	(Kryptotext y)		VIGENERE	(Klartext x)

Die Chiffrierarbeit lässt sich durch Benutzung einer Additionstabelle erleichtern (auch als **Vigenère-Tableau** bekannt).

+	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Um eine involutorische Chiffre zu erhalten, schlug Sir Francis Beaufort, ein Admiral der britischen Marine, vor, den Schlüsselstrom nicht auf den Klartext zu addieren, sondern letzteren von ersterem zu subtrahieren.

Beispiel 1.34 (Beaufort-Chiffre)

Verschlüsseln wir den Klartext BEAUFORT beispielsweise unter dem Schlüsselwort $k =$ *WIE*, so erhalten wir den Kryptotext *XMEQNSNB*. Ei-

ne erneute Verschlüsselung liefert wieder den Klartext BEAUFORT:

Chiffrierung:			Dechiffrierung:		
	WIEWIEWI	(Schlüsselstrom)		*WIEWIEWI*	(Schlüsselstrom)
−	BEAUFORT	(Klartext)	−	*XMEQNSNB*	(Kryptotext)
	XMEQNSNB	(Kryptotext)		BEAUFORT	(Klartext)

Bei den bisher betrachteten Chiffren wird aus einem Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ ein **periodischer Schlüsselstrom** $\hat{k} = \hat{k}_0 \dots \hat{k}_{n-1}$ erzeugt, das heißt, es gilt $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+d}$ für alle $i = 0, \dots, n-d-1$. Da eine kleine Periode das Brechen der Chiffre erleichtert, sollte entweder ein Schlüsselstrom mit sehr großer Periode oder noch besser ein **fortlaufender Schlüsselstrom** zur Chiffrierung benutzt werden. Ein solcher nichtperiodischer Schlüsselstrom lässt sich beispielsweise ohne großen Aufwand erzeugen, indem man an das Schlüsselwort den Klartext oder den Kryptotext anhängt (sogenannte ***Autokey*-Chiffrierung**).[†]

Beispiel 1.35 (*Autokey*-Chiffre)

Benutzen wir wieder das Schlüsselwort *WIE*, um den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klar- bzw. Kryptotextes zu erzeugen, so erhalten wir für den Klartext VIGENERE folgende Kryptotexte:

Klartext-Schlüsselstrom:			Kryptotext-Schlüsselstrom:		
	VIGENERE	(Klartext)		VIGENERE	(Klartext)
+	*WIEVIGEN*	(Schlüsselstrom)	+	*WIERQKVD*	(Schlüsselstrom)
	RQKZVKVR	(Kryptotext)		*RQKVDOMH*	(Kryptotext)

Auch die Dechiffrierung ist in beiden Fällen einfach. Bei der ersten Alternative kann der Empfänger durch Subtraktion des Schlüsselworts den Anfang des Klartextes bilden und gleichzeitig den Schlüsselstrom verlängern, so dass sich auf diese Weise Stück für Stück der gesamte Kryptotext entschlüsseln lässt. Noch einfacher gestaltet sich die Dechiffrierung im zweiten Fall, da sich hier der Schlüsselstrom vom Kryptotext nur durch das vorangestelle Schlüsselwort unterscheidet.

1.6 Der One-Time-Pad

Es besteht auch die Möglichkeit, eine Textstelle in einem Buch als Schlüssel zu vereinbaren und den dort beginnenden Text als Schlüsselstrom zu benutzen

[†]Die Idee, den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klartextes an ein Schlüsselwort zu bilden, stammt von Vigenère, während er mit der Erfindung der nach ihm benannten Vigenère-Chiffre „nichts zu tun“ hatte. Diese wird vielmehr Giovan Batista Belaso (1553) zugeschrieben.

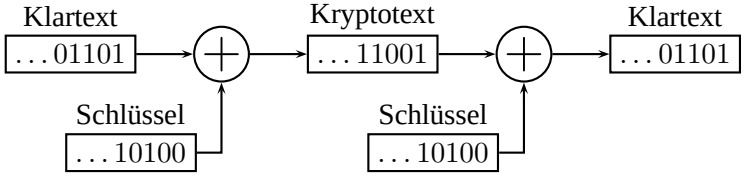
(Lauftextverschlüsselung). Besser ist es jedoch, aus einem relativ kurzen Schlüssel einen möglichst zufällig erscheinenden Schlüsselstrom zu erzeugen. Hierzu können beispielsweise Pseudozufallsgeneratoren eingesetzt werden. Absolute Sicherheit wird dagegen erreicht, wenn der Schlüsselstrom rein zufällig erzeugt und nach einmaliger Benutzung wieder vernichtet wird.[‡] Ein solcher „Wegwerfschlüssel“ (*One-time-pad* oder *One-time-tape*, im Deutschen auch als **individueller Schlüssel** bezeichnet) lässt sich allerdings nur mit großem Aufwand generieren und verteilen, weshalb diese Chiffre nur wenig praktikabel ist. Dennoch wurde diese Methode beispielsweise beim „heißen Draht“, der 1963 eingerichteten, direkten Fernschreibverbindung zwischen dem Weißen Haus in Washington und dem Kreml in Moskau, angewandt.

Beispiel 1.36 (*One-time-pad*)

Sei $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Klartextalphabet. Um einen Klartext $x = x_0 \ldots x_{n-1}$ zu verschlüsseln, wird auf jeden Klartextbuchstaben x_i ein neuer, zufällig generierter Schlüsselbuchstabe k_i addiert,

$$y = y_0 \ldots y_{n-1}, \text{ wobei } y_i = x_i + k_i.$$

Der Klartext wird also wie bei einer additiven Chiffre verschlüsselt, nur dass der Schlüssel nach einmaligem Gebrauch gewechselt wird. Dies entspricht dem Gebrauch einer Vigenère-Chiffre, falls als Schlüssel ein zufällig gewähltes Wort von der Länge des Klartextes benutzt wird. Wie diese ist der *One-time-pad* im Binärfall also involutorisch.



[‡]Diese Art der Schlüsselerzeugung schlug der amerikanische Major Joseph O. Mauborgne im Jahr 1918 vor, nachdem ihm ein von Gilbert S. Vernam für den Fernschreibverkehr entwickeltes Chiffriersystem vorgestellt wurde.