

## Übungsblatt 3

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 8.11.–11. 11. 2016*

*Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 16. 11. 2016*

**Essentielle Begriffe:** Relation, reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation und -klassen, Repräsentantensystem, Funktion, injektiv, Ordnung

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: **17+19**; 21; 22

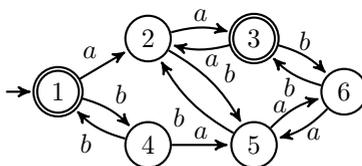
Sollten Sie jeweils mehr als ein Blatt benötigen, heften Sie diese bitte zusammen.

**Aufgabe 17** Gegeben sei nebenstehender DFA.

**6 Punkte**

Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

- (a)  $L_{1,2}^0, L_{2,1}^6, L_{2,5}^4$ , (mündlich)  
(b)  $L_{2,3}^5$  und  $L_{1,3}^5$ . (6 Punkte)



**Aufgabe 18**

**mündlich**

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne  $R_1$  die Relation „ist verheiratet mit“,  $R_2$  die Relation „ist Mutter von“ und  $R_3$  die Relation „ist Kind von“.

- (a)  $R_1 \circ R_2$ ,  
(b)  $R_2 \circ R_1$ ,  
(c)  $R_2 \circ R_3$ ,  
(d)  $R_3 \circ R_2$ ,  
(e)  $R_2 \circ R_1 \circ R_3$ .

**Aufgabe 19** Sei  $R$  eine Relation auf  $A$ . Beweisen Sie:

**6 Punkte**

- (a)  $R^2 \subseteq R \Leftrightarrow R$  transitiv  $\Leftrightarrow R^i \subseteq R$  für alle  $i \geq 1$ . (mündlich)  
(b)  $h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$ ,  $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$ . (mündlich)  
(c)  $R^* = R^+ \cup R^0$ ,  $R^+ = R \circ R^*$ . (mündlich, optional)  
(d)  $R$  ist symmetrisch  $\Rightarrow R^*$  ist symmetrisch. (mündlich, optional)  
(e)  $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$ . (6 Punkte)  
(f)  $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$ . (mündlich, optional)

**Aufgabe 20** Sei  $R = \{(\diamond, 2), (\heartsuit, 3), (\spadesuit, 4)\} \subseteq A \times B$  und  $\|A \times B\| = 6$ . **mündlich**

- (a) Geben Sie  $B \times A$  an und begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Welche der Relationen  $R$ ,  $R^T$ ,  $(A \times B) \setminus R$  und  $R \setminus \{(\diamond, 4)\}$  sind Funktionen? Welche der Funktionen sind zusätzlich injektiv?
- (c) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat  $R$  als Relation auf  $A \cup B$ ?
- (d) Wie viele Elemente muss man zu  $R$  hinzufügen, um eine lineare Striktordnung auf  $A \cup B$  zu erhalten?

**Aufgabe 21** Sei  $V = \{1, \dots, 5\}$  und  $R$  folgende Relation auf  $V$  **10 Punkte**

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 4)\}$$

- (a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation? *(3 Punkte)*
- (b) Veranschaulichen Sie die Relationen  $R$ ,  $R^T$ ,  $R^2$ ,  $R^3$ ,  $R^+$ ,  $h_{\text{sym}}(R)$  und  $h_{\text{äq}}(R)$  jeweils durch einen Digraphen. *(4 Punkte)*

Geben Sie jeweils eine kleinstmögliche Relation auf  $V$  an, die

- (c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv *(2 Punkte)*
- (d) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv *(1 Punkt)*

ist und beweisen Sie, dass Ihre Relationen kleinstmöglich sind.

**Aufgabe 22** Auf  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  seien folgende Relationen definiert: **8+4 Punkte**

- (a)  $xRy : \Leftrightarrow x + 2y$  ist durch 3 teilbar, *(mündlich)*
- (b)  $xBy : \Leftrightarrow |x - y| \leq 7$ , *(mündlich)*
- (c)  $xTy : \Leftrightarrow x \cdot y$  ist gerade, *(4 Punkte)*
- (d)  $xUy : \Leftrightarrow x + y$  ist gerade, *(4 Punkte)*
- (e)  $xYy : \Leftrightarrow x \cdot y$  ist eine Quadratzahl. *(4 Zusatzpunkte)*

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.

**Aufgabe 23** Sei  $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$ . **mündlich, optional**

Wie viele Paare müssen zu  $R$  jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf  $A = \{a, b, c, d\}$  zu erhalten? Geben Sie diese Paare jeweils an.