POSITIONSBESTIMMUNG MITTELS PEILWINKELN

JOHANNES NEUMANN (503378), DANIEL KUMMER (502074), MARCO LUTZ (197285)

ZUSAMMENFASSUNG. Mithilfe von Peilwinkeln zu gegebenen markanten Punkten soll die Position des Betrachters festgestellt werden. Da es sich hierbei um Messdaten handelt, ist auch der durch die Messung entstandene Fehler zu betrachten. Als Lösung wird eine, möglicherweise zusammenhängende, Fläche erwartet. Wir werden zunächst mathematische Verfahren vorstellen und deren Vor- und Nachteile diskutieren. Anschließend sollen Constraints definiert werden. Zu guter letzt sollen noch einige Hinweise zur konkreten Aufgabe erfolgen.

1. MATHEMATISCHE VORBETRACHTUNGEN

1.1. **Peilung von drei Punkten.** Zunächst bestimmen wir die möglichen Positionen, wenn man lediglig zwei Objekte betrachtet. Die gegebenen Werte sind der Peilwinkel zwischen den Objekten O_1 und O_2 sowie die absolute Position der Objekte und damit ihre Entfernung $c := dist(O_1, O_2)$ voneinander. Wir verwenden den Peripheriewinkelsatz, um die möglichen Positionen einzuschränken. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Messung des Winkels γ um den Wert $\Delta\gamma$ abweicht. Zur Veranschaulichung sei Abbildung 1 gegeben.

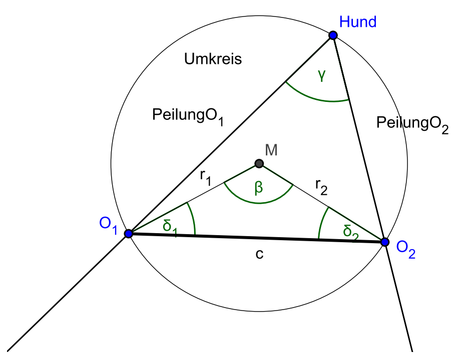

ABBILDUNG 1. Peilung zweier Objekte

Es ergibt sich aus dem Peripheriewinkelsatz, dass $\beta = 2\gamma$. Damit ergibt sich $\delta = \frac{180° - 2(\gamma+\Delta\gamma)}{2} = 90° - (\gamma + \Delta\gamma)$. Somit erhält man für den Radius des Kreises, auf dem sowohl O_1, O_2 als auch die gesuchte Position liegen müssen $r = \sin(\delta) \cdot c = c \cdot \sin(90° - (\gamma + \Delta\gamma)) = c \cdot \cos(\gamma + \Delta\gamma)$. Die Bestimmung der absoluten Position von M ist etwas schwieriger. Wir werden zunächst in einem relativen Koordinatensystem die Position von M bestimmen und anschließend eine Koordinatentransformation durchführen. Wir wählen unser relatives Koordinatensystem durch Verschiebung und Drehung so, dass O_1 im Koordinatenursprung und O_2 auf der x-Achse liegt. Diese Koordinatentransformation ist offenbar isometrisch. Es gilt also Abbildung 2.

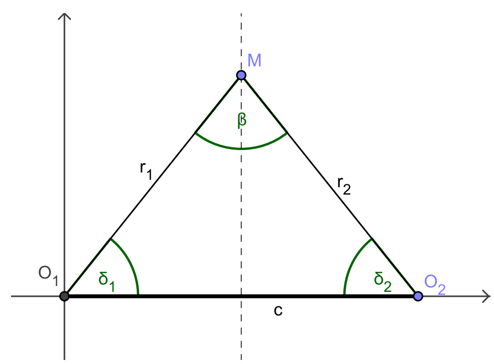

Abbildung 2. Relatives Koordinatensystem

Wir erhalten $x' = \frac{1}{2}c$ und $y' = r \cdot \cos(\gamma + \Delta\gamma)$. Diese müssen nun noch zurücktransformiert werden. Die Drehung erhalten wir dabei durch $x_{verschoben} = x' \cdot \cos(\phi) - y' \cdot \sin(\phi)$ und $y_{verschoben} = x' \cdot \sin(\phi) + y' \cdot \cos(\phi)$. ϕ ist dabei der Drehungswinkel, welcher sich durch $\phi = \left(arctan(\left|\frac{O_{2y}-O_{1y}}{O_{2x}-O_{1x}}\right|) + 90° \cdot \frac{|O_{2x}-O_{1x}|+O_{2x}-O_{1x}}{2|O_{2x}-O_{1x}|}\right) \cdot \frac{y}{|y|}$ ergibt. Die Verschiebung ergibt sich leicht durch $x = x_{verschoben} + O_{1x}$ und $y = y_{verschoben} + O_{1y}$. Somit ergibt sich $M = (x; y)$ mit $x = \frac{1}{2}c \cdot \cos(\phi) - r \cdot \cos(\gamma + \Delta\gamma) \cdot \sin(\phi) + O_{1x}$ und $y = \frac{1}{2}c \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\gamma + \Delta\gamma) \cdot \cos(\phi) + O_{1y}$.

Als mögliche Positionen erhalten wir also den Kreis mit Mittelpunkt in M und Radius r. Genauer handelt es sich um eine Fläche, da der Fehler $\Delta\gamma$ noch berücksichtigt werden muss. Wir haben also eigentlich Funktionen $r(\Delta\gamma)$ und $M(\Delta\gamma)$ deren Wertebereiche die möglichen Positionen angeben. Kennt man nun die Peilwinkel zu drei markanten Punkten, so kann man dieses Verfahren auf alle drei Punktepaare anwenden. Auf diese Weise erhält man einen Schnittpunkt, beziehungsweise eine Restfläche, welche dann als Position angenommen werden kann. Da aber auch die Radien der drei Kreise von $\Delta\gamma$ abhängen, ist es höchst unwahrscheinlich, dass sich die drei Kreise wirklich in einem Punkt schneiden. Vielmehr wird es sechs Punkte geben, in denen sich jeweils zwei der Kreise schneiden. Berechnet man allerdings die Mengen und ist die Abweichung $\Delta\gamma$ korrekt angegeben, so ergibt sich zu guterletzt eine zusammenhängende Menge, in der die Position liegt.

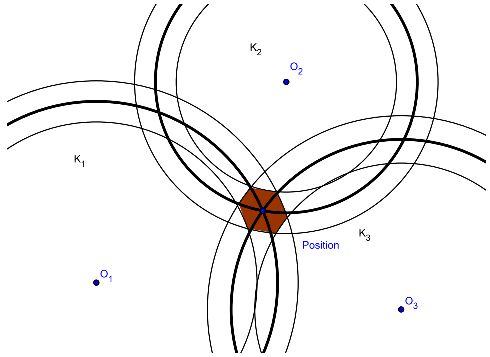

Abbildung 3. Schnitt der drei Peilungskreise im Idealfall

1.2. **Peilung von zwei Punkten und Entfernungsschätzung.** Wir bestimmen zunächst zu einem Objekt O die Entfernung um dann um diesen einen Kreis mit möglichen Positionen aufzuspannen. Dazu nehmen wir an, dass der Betrachter einen Abstand von $\approx 0\,mm$ zum Boden hat.

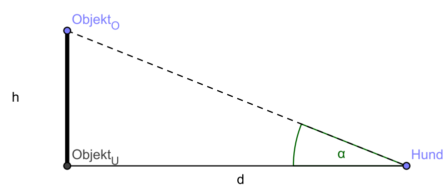

Abbildung 4. Entfernungsbestimmung

Es ergibt sich leicht, wenn $\Delta\alpha$ den Fehler von α angibt, dass $\tan(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan(\alpha+\Delta\alpha)}$. Somit muss für die mögliche Position des Hundes gelten, dass sie auf einem Kreis mit Radius d und Mittelpunkt O auf der Position des Objektes liegen muss. Hat man zwei Objekte, welche man auf diese Art peilen kann, so muss, wie oben, die Position im Schnittpunkt (oder der Schnittmenge) liegen. Es sind also wieder drei solcher Objekte nötig. In einigen Fällen kann es jedoch sein, dass der zweite Schnittpunkt außerhalb des Spielfeldes liegt. Dann genügen auch zwei Objekte.

Die Problematik bei diesem Verfahren liegt darin, dass in der Regel α klein sein wird. Dadurch wirkt sich der Fehler $\Delta\alpha$ um so stärker aus. Die Entfernungsschätzung wird daher recht ungenau sein, wodurch damit zu rechnen sein wird, dass die erste Methode genauer ist.

Stehen nur zwei Objekte zur Verfügung, so kann man die beiden Methoden kombinieren, da man zum einen den Kreis von dem Peilungswinkel erhält und zum anderen zwei Kreise um die beiden Objekte. Hat man nur ein Objekt, kann man deren linken und rechten Rand als Objekte auffassen und für diese dann diese Prozedur anwenden, da aber hierbei sowohl $\Delta\gamma$ als auch $\Delta\alpha$ sehr groß sein werden, wird auch das Ergebnis sehr ungenau sein, es sei denn, das Objekt ist sehr nah.

1.3. **Spezialfall eines Objektes ohne Höhe.** Es verbleibt ein Sonderfall, wenn als einzige Peilung ein Objekt O ohne Höhe vorhanden ist. Dies geschieht eigentlich nur, wenn man auf dem Spielfeld in der Nähe einer Ecke in Richtung der Ecke blickt. Hier ist es vonnöten den Horizont im Bild abzuschätzen (z.B. durch die Bildmitte). Wir nehmen an, dass der Betrachter in der Höhe h ist. Sei ϑ der Peilwinkel vom Punkt zum Horizont mit dem Messfehler $\Delta\vartheta$. Dann ergibt sich $d_E(\Delta\vartheta) = \frac{h}{\tan(\vartheta+\Delta\vartheta)}$.

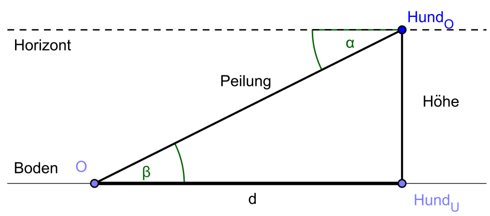

Abbildung 5. Entfernungsschätzung bei einem Objekt ohne Höhe

Bei einer Ecke kommt noch erschwerend hinzu, dass man diese nicht eindeutig bestimmen kann. Man erhält also vier Kreise, je einen um jede Ecke, auf denen sich der Betrachter befinden kann.

2. Definition der Constraints

Seien O_1 und O_2 Objekte mit den absoluten Peilungswinkeln zur x-Achse $\hat{\delta}_1$ und $\hat{\delta}_2$ sowie deren Höhen h_1 und h_2. Dann ergibt sich als relativer Peilwinkel zwischen O_1 und O_2 zu $\gamma = |\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2|$.

$$\begin{aligned}
V_{C_i} &= \{x, y\} \\
Dom(x) &= [-3000, 2999] \\
Dom(y) &= [-2000, 1999] \\
C_{(1,2)} &= \big\{(x,y) \mid \exists_{\Delta\gamma} : (x,y) \in K_{r(\Delta\gamma)}(M(\Delta\gamma))\big\} \\
C_1 &= \big\{(x,y) \mid \exists_{\Delta\alpha} : (x,y) \in K_{d(\Delta\alpha)}(O_1)\big\} \\
C_2 &= \big\{(x,y) \mid \exists_{\Delta\alpha} : (x,y) \in K_{d(\Delta\alpha)}(O_2)\big\} \\
C_1^E &= \big\{(x,y) \mid \exists_{\Delta\vartheta} : (x,y) \in K_{d_E(\Delta\vartheta)}(O_1)\big\}
\end{aligned}$$

Da sich diese Mengen nur schwer exakt berechnen lassen, kann man eine diskrete Teilmenge betrachten. Für deren Punkte lässt sich dann leicht bestimmten, ob diese in C_i liegen oder nicht. In dem Beispiel des Fußballspiels wäre zum Beispiel eine Diskretisierung von 1 cm möglich.

3. Das konkrete Problem

Bei den in der Aufgabenstellung gegebenen Bildern sind drei Fahnen enthalten. Somit könnten wir Constraint C_{12} verwenden. Da dieser allerdings deutlich schwerer als C_1 implementiert werden kann und die Genauigkeit weniger wichtig ist, da die Werte mit Lineal gemessen werden und auch nur zur Demonstration verwendet werden sollen, entscheiden wir uns für letzteren. Wir benötigen also jeweils den Peilwinkel zur Achse des Hundes, die Höhe und die absolute Position jeder der drei Fahnen. Wir schätzen die Werte wie folgt ab:

	Fahne 1	Fahne 2	Fahne 2
X	165	165	434
Y	5	394	394
h	40	40	40
$\phi_{Vertikal}$	7.2	10.8	9.4
$\phi_{Horizontal}$	-98	18	98

TABELLE 1. Die geschätzten Werte

Da es sich nur um eine grobe Schätzung handelt, haben wir für $\phi_{Horizontal}$ einfach den Abstand $dist$ (=Lotstrecke) vom Mittelpunkt des Objektes (Kante vom farbigen zum weißen Bereich) zur Mittelachse des Bildes gemessen. Diesen haben wir dann nach folgender Verhältnisgleichung ausgerechnet: $\frac{55^\circ}{7.2\,cm} = \frac{\phi_{Horizontal}}{dist}$. Für $\phi_{Vertikal}$ haben wir die Länge l des Objektes im Bild gemessen und anschließend $\phi_{Vertikal}$ mit $\frac{44^\circ}{5.6\,cm} = \frac{\phi_{Vertikal}}{l}$. Die Positionen und Höhen sind bereits aus dem Spielfeldplan bzw. so gegeben.

4. Compilation

Da es sich um ein Java-Programm handelt, sollte die Compilation sowie das Ausführen keine Problem darstellen. Die auszuführende Datei, welche die main-Methode enthält, heißt *Peilung.java.* Wir wünschen viel Spaß.