Übungsblatt 8

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 9.–12. 12. 2008
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 16. 12. 2008

Aufgabe 56 ***mündlich***
Ein PDA M heißt *deterministisch*, wenn seine Überführungsrelation $\vdash_M$ rechtseindeutig ist (d.h. es gilt $K \vdash_M K_1 \wedge K \vdash_M K_2 \Rightarrow K_1 = K_2$).
Zeigen Sie, dass ein PDA $M=(Z,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\#)$ genau dann deterministisch ist, wenn δ für alle $q \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ die Bedingung $\|\delta(q,a,A)\|+\|\delta(q,\varepsilon,A)\| \leq 1$ erfüllt.

Aufgabe 57 ***5 Punkte***
Eine Sprache L heißt *präfixfrei*, falls kein Wort in L ein echtes Präfix eines anderen Wortes in L ist.

(a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des *min*-Operators. *(mündlich)*
(b) Zeigen Sie, dass deterministische Kellerautomaten durch Leeren des Kellers genau die präfixfreien Sprachen in DCFL akzeptieren. *(mündlich)*
(c) Zeigen Sie, dass Kellerautomaten mit Endzuständen genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren (also gilt DCFL $\subseteq$ CFL). *(5 Punkte)*

Aufgabe 58 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und sei $\$ \notin \Sigma$. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $L\{\$\}$ ist präfixfrei.
(b) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\{\$\}$ in DCFL ist.
(c) L ist genau dann in DCFL, wenn $L\{\$\}$ von einem deterministischen PDA durch Leeren des Kellers akzeptiert wird.

Aufgabe 59 ***mündlich***

(a) Geben Sie DPDAs für die Sprachen $L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n,m \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\}$ an (also sind weder CFL noch DCFL unter Durchschnitt abgeschlossen).
(b) Seien $L_0 = \{0\}$, $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$ und $L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = L_0 L_3 \cup L_4 \in$ DCFL ist, nicht jedoch L^R.
(c) Zeigen Sie, dass CFL im Gegensatz zu DCFL unter Spiegelung abgeschlossen ist.

Aufgabe 60 ***mündlich***
Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $\bar{L}$ an, d.h. $L \in$ CFL $\cap$ co-CFL. (Bemerkung: L ist aber nicht in DCFL.)

Aufgabe 61 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) Die Klasse DCFL ist unter dem *min*-Operator abgeschlossen. *(mündlich)*
(b) CFL ist nicht unter dem *min*-Operator abgeschlossen. *(5 Punkte)*

   Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i \leq k \text{ oder } j \leq k\}$.

(c) DCFL ist nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen. *(5 Punkte)*

   Hinweis: Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung geführten Beweis, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da zwar L_0^* und $L = L_0 L_3 \cup L_4$ (siehe Aufgabe 59) in DCFL sind, nicht aber $L_0^* L$, und finden Sie eine Sprache L', so dass zwar $L_0 \cup L'$, aber nicht $(L_0 \cup L')^*$ in DCFL ist.

Aufgabe 62 ***5 Punkte***
Eine kontextfreie Sprache L heißt *(inhärent) mehrdeutig*, falls jede kontextfreie Grammatik für L mehrdeutig ist. Wir nennen L *eindeutig*, wenn L nicht mehrdeutig ist. Zeigen Sie:

(a) Die Sprache $(L_0 L_3 \cup L_4)^R$ (siehe Aufgabe 59) ist eindeutig (es gibt also eindeutige Sprachen in CFL $-$ DCFL). *(mündlich)*
(b) Jede deterministisch kontextfreie Sprache $L \in$ DCFL ist eindeutig. *(5 Punkte)*

   Hinweis: Konstruieren Sie aus einem deterministischen PDA M, der die präfixfreie Sprache $L\{\$\}$ durch Leeren des Kellers akzeptiert (siehe Aufgabe 58), eine eindeutige kontextfreie Grammatik für $L\{\$\}$ und daraus eine für L.

Bemerkung: Die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k\}$ ist inhärent mehrdeutig (die eindeutigen kontextfreien Sprachen liegen also echt zwischen DCFL und CFL).

Aufgabe 63 ***mündlich***
Zeigen Sie, dass ein DPDA M, der alle Eingaben zu Ende liest, bei jeder Eingabe x höchstens linear viele (d.h. $\leq c|x| + c$ für eine Konstante c) Rechenschritte macht.

Aufgabe 64 Sei $M = (Z,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\#,E)$ ein DPDA. ***mündlich***
Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine Konfiguration $K = (p,\varepsilon,A)$ mit $A \in \Gamma$ entscheidet, ob M ausgehend von K unendlich viele ε-Anweisungen ausführt.

Aufgabe 65 ***10 Punkte***
Sei $M = (Z,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\#)$ ein PDA mit $Z = \{q,q',p\}$, $\Sigma = \{a,b\}$, $\Gamma = \{A,\#\}$ und

$$\delta: \quad qa\# \to qA\#, \quad qaA \to qAA, \quad qbA \to q', \quad q'bA \to q', \quad q'\epsilon\# \to p.$$

(a) Ist $M' = (Z,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\#,\{p\})$ ein DPDA? Begründen Sie. *(2 Punkte)*
(b) Geben Sie explizite Beschreibungen für $L(M)$ und $L(M')$ an. *(2 Punkte)*
(c) Transformieren Sie M' mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen DPDA für das Komplement von $L(M')$. *(6 Punkte)*