

# Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik  
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2016/17

# Kontextsensitive Sprachen

## Definition

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik.

- ①  $G$  heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln  $u \rightarrow v$  gilt:

$$u \in V \text{ und } v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}.$$

(d.h. alle Regeln haben die Form  $A \rightarrow aB$ ,  $A \rightarrow a$  oder  $A \rightarrow \varepsilon$ )

- ②  $G$  heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln  $u \rightarrow v$  gilt:

$$u \in V. \quad (\text{d.h. alle Regeln haben die Form } A \rightarrow \alpha)$$

- ③  $G$  heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln  $u \rightarrow v$  gilt:

$$|v| \geq |u|. \quad (\text{mit Ausnahme der } \varepsilon\text{-Sonderregel, s. unten})$$

- ④ Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0.

## Die $\varepsilon$ -Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel  $S \rightarrow \varepsilon$  zulässig. Aber nur, wenn das Startsymbol  $S$  nur links vorkommt.

## CFL ist echt in CSL enthalten

## Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist CFL in CSL enthalten.
- Zudem ist folgende Sprache nicht kontextfrei:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

- $L$  kann jedoch von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt werden.
- Daher ist CFL echt in CSL enthalten.

## Beispiel

- Betrachte die kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $V = \{S, B\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und den Regeln

$$P: S \rightarrow aSBc, abc \quad (1, 2) \quad cB \rightarrow Bc \quad (3) \quad bB \rightarrow bb \quad (4)$$

- In  $G$  lässt sich beispielsweise das Wort  $w = aabbcc$  ableiten:

$$\underline{S} \xrightarrow{(1)} a\underline{S}Bc \xrightarrow{(2)} aabc\underline{B}c \xrightarrow{(3)} aab\underline{B}cc \xrightarrow{(4)} aabbcc$$

- Allgemein gilt für alle  $n \geq 1$ :

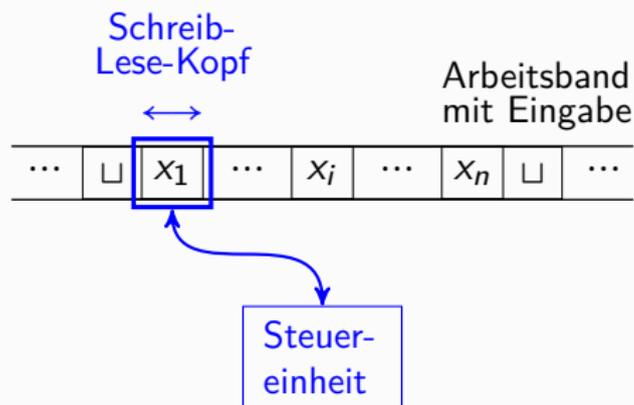
$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{(1)} a^{n-1} S (Bc)^{n-1} \xrightarrow{(2)} a^n bc (Bc)^{n-1} \xrightarrow{(3)} a^n b B^{n-1} c^n \\ &\xrightarrow{(4)} a^n b^n c^n \end{aligned}$$

- Also gilt  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \geq 1$ .

## Beispiel (Schluss)

- Betrachte die kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $V = \{S, B\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und den Regeln
$$P: S \rightarrow aSBc, abc \quad (1,2) \quad cB \rightarrow Bc \quad (3) \quad bB \rightarrow bb \quad (4)$$
- Umgekehrt folgt durch Induktion über die Ableitungslänge  $m$ , dass jede Satzform  $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$  mit  $S \Rightarrow^m \alpha$  die folgenden Bedingungen erfüllt:
  - $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha) + \#_B(\alpha) = \#_c(\alpha)$ ,
  - links von  $S$  kommen nur  $a$ 's vor,
  - links von einem  $a$  kommen ebenfalls nur  $a$ 's vor,
  - links von einem  $b$  kommen nur  $a$ 's oder  $b$ 's vor.
- Daraus ergibt sich, dass in  $G$  nur Wörter  $w \in \Sigma^*$  der Form  $w = a^n b^n c^n$  ableitbar sind, d.h.  $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \text{CSL}$ .





- Um ein geeignetes Maschinenmodell für die kontextsensitiven Sprachen zu finden, führen wir zunächst das Rechenmodell der nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) ein.
- Eine NTM erhält ihre Eingabe auf einem nach links und rechts unbegrenzten Band.
- Während ihrer Rechnung kann sie den Schreib-Lese-Kopf auf dem Band in beide Richtungen bewegen und dabei die besuchten Bandfelder lesen sowie die gelesenen Zeichen gegebenenfalls überschreiben.

# Das Rechenmodell der Turingmaschine

## Definition

- Sei  $k \geq 1$ . Eine **nichtdeterministische  $k$ -Band-Turingmaschine** ( $k$ -NTM oder einfach **NTM**) wird durch ein 6-Tupel  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  beschrieben, wobei
  - $Z$  eine endliche Menge von Zuständen,
  - $\Sigma$  das Eingabealphabet (mit  $\sqcup \notin \Sigma$ ),
  - $\Gamma$  das Arbeitsalphabet (mit  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$ ),
  - $\delta: Z \times \Gamma^k \rightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$  die Überföhrungsfunktion,
  - $q_0$  der Startzustand und
  - $E \subseteq Z$  die Menge der Endzustände ist.
- Eine  $k$ -NTM  $M$  heißt **deterministisch** (kurz:  $M$  ist eine  $k$ -DTM oder einfach **DTM**), falls für alle  $(q, a_1, \dots, a_k) \in Z \times \Gamma^k$  gilt:

$$\|\delta(q, a_1, \dots, a_k)\| \leq 1.$$

- Für  $(q, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k) \in \delta(p, a_1, \dots, a_k)$  schreiben wir auch  $(p, a_1, \dots, a_k) \rightarrow (q, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k)$ .
- Eine solche **Anweisung** ist ausführbar, falls
  - $p$  der aktuelle Zustand von  $M$  ist und
  - sich für  $i = 1, \dots, k$  der Lesekopf des  $i$ -ten Bandes auf einem mit  $a_i$  beschrifteten Feld befindet.
- Ihre Ausführung bewirkt, dass  $M$ 
  - vom Zustand  $p$  in den Zustand  $q$  übergeht,
  - auf Band  $i$  das Symbol  $a_i$  durch  $b_i$  ersetzt und
  - den Kopf gemäß  $D_i$  bewegt (L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung).

## Definition

- Eine **Konfiguration** ist ein  $(3k + 1)$ -Tupel

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

und besagt, dass

- $q$  der momentane Zustand ist und
  - das  $i$ -te Band mit  $\dots \sqcup u_i a_i v_i \sqcup \dots$  beschriftet ist, wobei sich der Kopf auf dem Zeichen  $a_i$  befindet.
- Im Fall  $k = 1$  schreiben wir für eine Konfiguration  $(q, u, a, v)$  auch kurz  $uqav$ .

## Definition

Seien  $K = (p, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$  und  $K' = (q, u'_1, a'_1, v'_1, \dots, u'_k, a'_k, v'_k)$  Konfigurationen.  $K'$  heißt **Folgekonfiguration** von  $K$  (kurz  $K \vdash K'$ ), falls eine Anweisung  $(p, a_1, \dots, a_k) \rightarrow (q, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k)$  existiert, so dass für  $i = 1, \dots, k$  gilt:

im Fall $D_i = N$ :	$D_i = R$ :	$D_i = L$ :
$K$ : $\overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K'$ : $\overline{u_i \boxed{b_i} v_i}$	$K$ : $\overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K'$ : $\overline{u_i b_i \boxed{a'_i} v'_i}$	$K$ : $\overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K'$ : $\overline{u'_i \boxed{a'_i} b_i v_i}$
$u'_i = u_i,$ $a'_i = b_i$ und $v'_i = v_i.$	$u'_i = u_i b_i$ und $a'_i v'_i = \begin{cases} v_i, & v_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst.} \end{cases}$	$u'_i a'_i = \begin{cases} u_i, & u_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$ und $v'_i = b_i v_i.$

# Das Rechenmodell der Turingmaschine

## Definition

- Die **Startkonfiguration** von  $M$  bei Eingabe  $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  ist

$$K_x = \begin{cases} (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x \neq \varepsilon, \\ (q_0, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x = \varepsilon. \end{cases}$$

- Eine **Rechnung** von  $M$  bei Eingabe  $x$  ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Konfigurationen  $K_0, K_1, K_2 \dots$  mit  $K_0 = K_x$  und  $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots$ .
- Die von  $M$  **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists K \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k : K_x \vdash^* K\}.$$

- Ein Wort  $x$  wird also genau dann von  $M$  akzeptiert (kurz:  **$M(x)$  akzeptiert**), wenn es eine Rechnung von  $M$  bei Eingabe  $x$  gibt, bei der ein Endzustand erreicht wird.

## Beispiel

Betrachte die 1-DTM  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  mit  $Z = \{q_0, \dots, q_4\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$ ,  $E = \{q_4\}$  und den Anweisungen

$\delta: q_0a \rightarrow q_1AR$  (1) Anfang der Schleife: Ersetze das erste  $a$  durch  $A$

$q_1a \rightarrow q_1aR$  (2) Bewege den Kopf nach rechts bis zum ersten  $b$

$q_1B \rightarrow q_1BR$  (3) und ersetze dies durch ein  $B$  (falls kein  $b$  mehr

$q_1b \rightarrow q_2BL$  (4) vorhanden ist, dann halte ohne zu akzeptieren).

$q_2a \rightarrow q_2aL$  (5) Bewege den Kopf nach links bis ein  $A$  kommt,

$q_2B \rightarrow q_2BL$  (6) gehe ein Feld nach rechts zurück und wiederhole

$q_2A \rightarrow q_0AR$  (7) die Schleife.

$q_0B \rightarrow q_3BR$  (8) Falls kein  $a$  am Anfang der Schleife, dann teste,

$q_3B \rightarrow q_3BR$  (9) ob noch ein  $b$  vorhanden ist. Wenn ja, dann halte

$q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N$  (10) ohne zu akzeptieren. Andernfalls akzeptiere.

## Beispiel (Fortsetzung)

$$\delta: q_0a \rightarrow q_1AR \quad (1) \quad q_1a \rightarrow q_1aR \quad (2) \quad q_2a \rightarrow q_2aL \quad (5) \quad q_0B \rightarrow q_3BR \quad (8)$$

$$q_1B \rightarrow q_1BR \quad (3) \quad q_2B \rightarrow q_2BL \quad (6) \quad q_3B \rightarrow q_3BR \quad (9)$$

$$q_1b \rightarrow q_2BL \quad (4) \quad q_2A \rightarrow q_0AR \quad (7) \quad q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N \quad (10)$$

- Dann akzeptiert  $M$  die Eingabe  $aabb$  wie folgt:

$$\begin{array}{cccc}
 q_0aabb \vdash Aq_1abb & \vdash Aaq_1bb & \vdash Aq_2aBb & \vdash q_2AaBb \\
 (1) & (2) & (4) & (5) \\
 \vdash Aq_0aBb & \vdash AAq_1Bb & \vdash AABq_1b & \vdash AAq_2BB \\
 (7) & (1) & (3) & (4) \\
 \vdash Aq_2ABB & \vdash AAq_0BB & \vdash AABq_3B & \vdash AABBq_3\sqcup \\
 (6) & (7) & (8) & (9) \\
 \vdash AABBq_4\sqcup \\
 10
 \end{array}$$

- Ähnlich lässt sich für ein beliebiges  $n \geq 1$  zeigen, dass  $a^n b^n \in L(M)$  ist.

## Beispiel (Schluss)

$$\begin{aligned} \delta: q_0 a \rightarrow q_1 A R \quad (1) \quad & q_1 a \rightarrow q_1 a R \quad (2) \quad & q_2 a \rightarrow q_2 a L \quad (5) \quad & q_0 B \rightarrow q_3 B R \quad (8) \\ & q_1 B \rightarrow q_1 B R \quad (3) \quad & q_2 B \rightarrow q_2 B L \quad (6) \quad & q_3 B \rightarrow q_3 B R \quad (9) \\ & q_1 b \rightarrow q_2 B L \quad (4) \quad & q_2 A \rightarrow q_0 A R \quad (7) \quad & q_3 \sqcup \rightarrow q_4 \sqcup N \quad (10) \end{aligned}$$

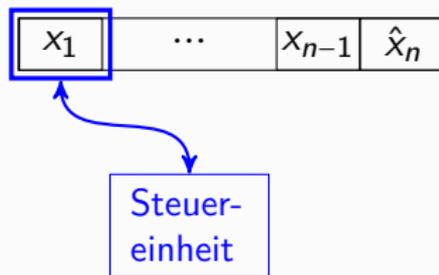
- Andererseits führt die Eingabe  $abb$  auf die Rechnung

$$q_0 abb \xrightarrow{(1)} Aq_1 bb \xrightarrow{(4)} q_2 ABb \xrightarrow{(7)} Aq_0 Bb \xrightarrow{(8)} ABq_3 b$$

- Da diese nicht fortsetzbar ist und da  $M$  deterministisch ist, kann  $M(abb)$  nicht den Endzustand  $q_4$  erreichen, d.h.  $abb$  gehört nicht zu  $L(M)$ .
- Tatsächlich lässt sich zeigen, dass  $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  ist.
- In den Übungen werden wir eine 1-DTM für die Sprache  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$  konstruieren.



- Es ist leicht zu sehen, dass jede Typ-0 Sprache von einer NTM  $M$  erkannt wird, die ausgehend von der Eingabe  $x$  eine Rückwärtsableitung (Reduktion) auf das Startsymbol sucht.
- Im Fall einer Typ-1 Sprache und  $x \neq \varepsilon$  ist die linke Seite jeder benutzten Regel höchstens so lang wie die rechte Seite.
- Daher muss  $M$  in diesem Fall nur deshalb den Bereich der Eingabe  $x = x_1 \cdots x_n$  verlassen, um das Ende von  $x$  erkennen zu können.
- Falls wir jedoch das letzte Zeichen  $x_n$  von  $x$  markieren, kann  $M$  die Rechnung auf den Bereich der (markierten) Eingabe beschränken.



- NTMs mit dieser Eigenschaft werden auch als LBAs bezeichnet.

# Linear beschränkte Automaten

## Definition

- Für ein Alphabet  $\Sigma$  sei  $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$ .
- Für  $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  sei  $\hat{x} = x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n$ .
- Eine 1-NTM  $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$  heißt **LBA**, falls gilt:
 
$$\forall x \in \Sigma^+ : K_{\hat{x}} \vdash^* uqav \Rightarrow |uav| \leq |x|$$
- Die von einem LBA  $M$  **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist
 
$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(\hat{x}) \text{ akzeptiert}\}$$
- Ein deterministischer LBA wird auch als **DLBA** bezeichnet.
- Die Klasse der **deterministisch kontextsensitiven** Sprachen ist
 
$$\text{DCSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DLBA}\}.$$

## Bemerkung

Jede  $k$ -NTM, die bei Eingaben der Länge  $n$  höchstens linear viele (also  $cn + c$  für eine Konstante  $c$ ) Bandfelder besucht, kann von einem LBA simuliert werden. LBA steht also für **linear beschränkter Automat**.

## Beispiel

- Es ist nicht schwer, die 1-DTM  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  mit
  - $\delta: q_0a \rightarrow q_1AR$  (1)  $q_1a \rightarrow q_1aR$  (2)  $q_2a \rightarrow q_2aL$  (5)  $q_0B \rightarrow q_3BR$  (8)
  - $q_1B \rightarrow q_1BR$  (3)  $q_2B \rightarrow q_2BL$  (6)  $q_3B \rightarrow q_3BR$  (9)
  - $q_1b \rightarrow q_2BL$  (4)  $q_2A \rightarrow q_0AR$  (7)  $q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N$  (10)
 in einen DLBA  $M' = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma', \delta', q_0, E)$  für die Sprache  $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  umzuwandeln.
- Ersetze hierzu
  - $\Sigma = \{a, b\}$  durch  $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$ ,
  - $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$  durch  $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$  sowie
  - die Anweisung  $q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N$  (10) durch  $q_3\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$  (10')
 und füge die Anweisungen  $q_1\hat{b} \rightarrow q_2\hat{B}L$  (4a) und  $q_0\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$  (8a) hinzu:

## Beispiel

- Ersetze die Anweisung  $q_3 \sqcup \rightarrow q_4 \sqcup N$  (10) durch  $q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N$  (10') und füge die Anweisungen  $q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B}L$  (4a) und  $q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N$  (8a) hinzu:

$$\begin{array}{llll}
 \delta': q_0 a \rightarrow q_1 AR & (1) & q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B}L & (4a) & q_0 B \rightarrow q_3 BR & (8) \\
 q_1 a \rightarrow q_1 aR & (2) & q_2 a \rightarrow q_2 aL & (5) & q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N & (8a) \\
 q_1 B \rightarrow q_1 BR & (3) & q_2 B \rightarrow q_2 BL & (6) & q_3 B \rightarrow q_3 BR & (9) \\
 q_1 b \rightarrow q_2 BL & (4) & q_2 A \rightarrow q_0 AR & (7) & q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N & (10')
 \end{array}$$

- Dann akzeptiert  $M'$  die Eingabe  $aab\hat{b}$  wie folgt (d.h.  $aab\hat{b} \in L(M')$ ):

$$\begin{array}{cccccc}
 q_0 aab\hat{b} & \vdash & Aq_1 ab\hat{b} & \vdash & Aaq_1 b\hat{b} & \vdash & Aq_2 aB\hat{b} & \vdash & q_2 AaB\hat{b} \\
 (1) & & & (2) & & (4) & & (5) & \\
 \vdash & Aq_0 aB\hat{b} & \vdash & AAq_1 B\hat{b} & \vdash & AABq_1 \hat{b} & \vdash & AAq_2 B\hat{b} \\
 (7) & & (1) & & (3) & & (4a) & & \\
 \vdash & Aq_2 AB\hat{b} & \vdash & AAq_0 B\hat{b} & \vdash & AABq_3 \hat{b} & \vdash & AABq_4 \hat{b} \\
 (6) & & (7) & & (8) & & (10') & & 
 \end{array}$$

## Beispiel

- Ersetze die Anweisung  $q_3 \sqcup \rightarrow q_4 \sqcup N$  (10) durch  $q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N$  (10') und füge die Anweisungen  $q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B}L$  (4a) und  $q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N$  (8a) hinzu:

$$\begin{array}{lll}
 \delta': q_0 a \rightarrow q_1 AR & (1) & q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B}L & (4a) & q_0 B \rightarrow q_3 BR & (8) \\
 q_1 a \rightarrow q_1 aR & (2) & q_2 a \rightarrow q_2 aL & (5) & q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N & (8a) \\
 q_1 B \rightarrow q_1 BR & (3) & q_2 B \rightarrow q_2 BL & (6) & q_3 B \rightarrow q_3 BR & (9) \\
 q_1 b \rightarrow q_2 BL & (4) & q_2 A \rightarrow q_0 AR & (7) & q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B}N & (10')
 \end{array}$$

- Die Eingabe  $a\hat{b}$  wird ebenfalls akzeptiert:

$$\begin{array}{ll}
 q_0 a \hat{b} \vdash Aq_1 \hat{b} & \vdash q_2 A\hat{B} \\
 (1) & (4a) \\
 \vdash Aq_0 \hat{B} & \vdash Aq_4 \hat{B} \\
 (7) & (8a)
 \end{array}$$



## Bemerkung

- Der DLBA  $M'$  für die Sprache  $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  aus obigem Beispiel lässt sich leicht in einen DLBA für die kontextsensitive Sprache  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$  transformieren (siehe Übungen).
- Die Sprache  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$  liegt also in  $\text{DCSL} \setminus \text{CFL}$ .
- Bis heute ungelöst ist die Frage, ob die Klasse  $\text{DCSL}$  eine echte Teilklasse von  $\text{CSL}$  ist oder nicht?
- Diese Fragestellung ist als **LBA-Problem** bekannt.

Als nächstes zeigen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

## Satz

$CSL = \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}.$

## Beweis von $CSL \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird  $L(G)$  von folgendem LBA  $M$  akzeptiert (o.B.d.A. sei  $\varepsilon \notin L(G)$ ):

**Arbeitsweise von  $M$  bei Eingabe  $\hat{x} = x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n$  mit  $n > 0$ :**

- 1 Markiere das erste Eingabezeichen  $x_1$  mittels  $\tilde{x}_1$  (bzw.  $\hat{x}_1$  mittels  $\tilde{\tilde{x}}_1$ )
- 2 Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel  $\alpha \rightarrow \beta$  aus  $P$
- 3 Wähle ein beliebiges Vorkommen von  $\beta$  auf dem Band  
(falls  $\beta$  nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
- 4 Ersetze die ersten  $|\alpha|$  Zeichen von  $\beta$  durch  $\alpha$
- 5 Falls das erste (oder letzte) Zeichen von  $\beta$  markiert war,  
markiere auch das erste (letzte) Zeichen von  $\alpha$
- 6 Verschiebe die Zeichen rechts von  $\beta$  um  $|\beta| - |\alpha|$  Positionen nach  
links und überschreibe die frei werdenden Felder mit Blanks
- 7 Enthält das Band nur noch das (doppelt markierte) Startsymbol  
gefolgt von Blanks, so halte in einem Endzustand
- 8 Gehe zurück zu Schritt 2

Beweis von  $CSL \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$ 

- Nun ist leicht zu sehen, dass  $M$  wegen  $|\beta| \geq |\alpha|$  tatsächlich ein LBA ist.
- $M$  akzeptiert  $x$ , falls es gelingt, eine Ableitung für  $x$  in  $G$  zu finden (in umgekehrter Reihenfolge).
- Da sich genau für die Wörter in  $L(G)$  eine Ableitung finden lässt, folgt  $L(M) = L(G)$ . □

# Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

- Sei  $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$  ein LBA (o.B.d.A. sei  $\varepsilon \notin L(M)$ ).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma = \{S, A, (qc, a), (c, a) \mid q \in Z, c \in \Gamma, a \in \Sigma\},$$

die für alle  $a, b \in \Sigma$  und  $c, d \in \Gamma$  folgende Regeln enthält:

$P:$	$S \rightarrow A(\hat{a}, a), (q_0\hat{a}, a)$	(S)	„Startregeln“
	$A \rightarrow A(a, a), (q_0a, a)$	(A)	„A-Regeln“
	$(c, a) \rightarrow a$	(F)	„Finale Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow a,$	falls $q \in E$	(E) „E-Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow (q'c', a),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'N$	(N) „N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \rightarrow (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'R$	(R) „R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \rightarrow (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'L$	(L) „L-Regeln“

Beweis von  $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$ 

## Beispiel

- Betrachte den LBA  $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$  mit  $Z = \{q_0, \dots, q_4\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, A, B, \hat{A}, \hat{B}, \sqcup\}$  und  $E = \{q_4\}$ , sowie

$$\begin{array}{llll} \delta: q_0 a \rightarrow q_1 A R & q_1 b \rightarrow q_2 B L & q_2 A \rightarrow q_0 A R & q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B} N \\ q_1 a \rightarrow q_1 a R & q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B} L & q_2 B \rightarrow q_2 B L & q_3 B \rightarrow q_3 B R \\ q_1 B \rightarrow q_1 B R & q_2 a \rightarrow q_2 a L & q_0 B \rightarrow q_3 B R & q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B} N \end{array}$$

- Die zugehörige kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  hat dann die Variablenmenge

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma \\ &= \{S, A, (q_i c, a), (q_i c, b), (c, a), (c, b) \mid c \in \Gamma\} \end{aligned}$$

- Die Regelmenge  $P$  von  $G$  enthält folgende Start- und A-Regeln:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow A(\hat{a}, a), A(\hat{b}, b), (q_0 \hat{a}, a), (q_0 \hat{b}, b) & (S_1-S_4) \\ A \rightarrow A(a, a), A(b, b), (q_0 a, a), (q_0 b, b) & (A_1-A_4) \end{array}$$

Beweis von  $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$ 

## Beispiel

Zudem enthält  $P$  für jedes  $c \in \Gamma$  die F- und E-Regeln (wegen  $E = \{q_4\}$ ):

$$(c, a) \rightarrow a, (c, b) \rightarrow b \quad (F_1-F_{16})$$

$$(q_4c, a) \rightarrow a, (q_4c, b) \rightarrow b \quad (E_1-E_{16})$$

Daneben enthält  $P$  beispielsweise noch folgende Regeln:

- Für die Anweisung  $q_3\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$  die beiden N-Regeln

$$(q_3\hat{B}, a) \rightarrow (q_4\hat{B}, a) \text{ und } (q_3\hat{B}, b) \rightarrow (q_4\hat{B}, b).$$

- Für die Anweisung  $q_1b \rightarrow q_2BL$  die 32 L-Regeln (für bel.  $d \in \Gamma$ )

$$(d, a)(q_1b, a) \rightarrow (q_2d, a)(B, a), \quad (d, a)(q_1b, b) \rightarrow (q_2d, a)(B, b),$$

$$(d, b)(q_1b, a) \rightarrow (q_2d, b)(B, a), \quad (d, b)(q_1b, b) \rightarrow (q_2d, b)(B, b).$$

- Für die Anweisung  $q_0a \rightarrow q_1AR$  die 32 R-Regeln (für bel.  $d \in \Gamma$ )

$$(q_0a, a)(d, a) \rightarrow (A, a)(q_1d, a), \quad (q_0a, a)(d, b) \rightarrow (A, a)(q_1d, b),$$

$$(q_0a, b)(d, a) \rightarrow (A, b)(q_1d, a), \quad (q_0a, b)(d, b) \rightarrow (A, b)(q_1d, b).$$

Beweis von  $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$ 

- Sei  $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$  ein LBA (o.B.d.A. sei  $\varepsilon \notin L(M)$ ).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma,$$

die für alle  $a, b \in \Sigma$  und  $c, d \in \Gamma$  folgende Regeln enthält:

$P:$	$S \rightarrow A(\hat{a}, a), (q_0\hat{a}, a)$	(S)	„Startregeln“
	$A \rightarrow A(a, a), (q_0a, a)$	(A)	„A-Regeln“
	$(c, a) \rightarrow a$	(F)	„Finale Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow a,$	falls $q \in E$	(E) „E-Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow (q'c', a),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'N$	(N) „N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \rightarrow (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'R$	(R) „R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \rightarrow (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \rightarrow_M q'c'L$	(L) „L-Regeln“

## Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \text{CSL}$

- Durch Induktion über  $m$  lässt sich nun leicht für alle  $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$  und  $q \in Z$  die folgende Äquivalenz beweisen:

$$q_0 x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \dots a_{i-1} q a_i \dots a_n \text{ gdw.}$$

$$(q_0 x_1, x_1) \dots (\hat{x}_n, x_n) \xRightarrow{(N,R,L)}^m (a_1, x_1) \dots (q a_i, x_i) \dots (a_n, x_n)$$

- Ist also  $q_0 x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \dots a_{i-1} q a_i \dots a_n$  eine akzeptierende Rechnung von  $M(x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n)$  mit  $q \in E$ , so folgt

$$\begin{aligned} S &\xRightarrow{(S)} A(\hat{x}_n, x_n) \xRightarrow{(A)}^{n-1} (q_0 x_1, x_1)(x_2, x_2) \dots (x_{n-1}, x_{n-1})(\hat{x}_n, x_n) \\ &\xRightarrow{(N,L,R)}^m (a_1, x_1) \dots (a_{i-1}, x_{i-1})(q a_i, x_i) \dots (a_n, x_n) \xRightarrow{(F,E)}^n x_1 \dots x_n \end{aligned}$$

- Die Inklusion  $L(G) \subseteq L(M)$  folgt analog. □

### Bemerkung

Eine einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass 1-NTMs genau die Sprachen vom Typ 0 akzeptieren (siehe Übungen).

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja
DCSL	ja	ja	ja	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
RE	ja	ja	nein	ja	ja

- In der VL Komplexitätstheorie wird gezeigt, dass die Klasse CSL unter Komplementbildung abgeschlossen ist.
- Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Klasse RE nicht unter Komplementbildung abgeschlossen ist.
- Die übrigen Abschlusseigenschaften der Klassen DCSL, CSL und RE in obiger Tabelle werden in den Übungen bewiesen.