Übungen zur Komplexitätstheorie — Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in $\mathrm{NTIME}(t) \cap \text{co-NTIME}(t)$ liegt, falls eine $t(n)$-zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 18 (Compression Theorem) Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$, so dass es für jede $s(n)$-platzbeschränkte DTM M mit $L(M) = L$ eine DTM M' gibt mit $L(M') = L$ und $\mathit{space}_{M'}(x) \le \log s(|x|)$ für fast alle Eingaben $x \in \{0,1\}^*$.
Hinweis: Definieren Sie die Funktion S durch $S(n) = 2$ für $n \le 0$ und $S(n+1) = 2^{S(n)}$ für $n > 0$, und konstruieren Sie bezüglich einer geeigneten Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs eine Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Falls M_i die Sprache L entscheidet, so gilt $s_i(n) \ge S(n-i)$ für fast alle n ($s_i(n)$ bezeichnet den maximalen Platzverbrauch von M_i bei Eingaben der Länge n).

b) Für alle $k \ge 1$ gibt es eine TM M_i mit $S_i(n) \le S(n-k)$, die L entscheidet.

Aufgabe 19 (Union Theorem) Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\mathrm{DSPACE}(S(n)) = \mathrm{PSPACE}$. *Hinweis:* Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung $M_1, M_2, \ldots$ aller DTMs so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

a) Für alle k gilt $S(n) \ge n^k$ für fast alle n.

b) Falls der Platzbedarf $S_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $S_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gilt auch $S_i(n) > S(n)$ für unendlich viele n.

Aufgabe 20 (schriftlich, 10 Punkte)

Beweisen Sie den Platzhierarchiesatz: Ist f eine echte Komplexitätsfunktion und gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist

$$\mathrm{DSPACE}(f(n)) \backslash \mathrm{DSPACE}(g(n)) \ne \emptyset.$$