Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 12

Aufgabe 44 Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \to \Sigma^*$ heißt *und-Funktion* für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x\#y) \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* ist analog definiert. Sei $\mathcal{C}$ eine unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei C ein $\mathcal{C}$-vollständiges Problem. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{C}$ ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn C eine und-Funktion in FL hat.

b) GA hat eine oder-Funktion in FL.

c) SAT und GI haben und- und oder-Funktionen in FL.

d) NP, $\mathrm{co\text{-}NP}$ und $\mathrm{NP} \cap \mathrm{co\text{-}NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.

e) $\mathrm{NP} \cup \mathrm{co\text{-}NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\mathrm{NP} = \mathrm{co\text{-}NP}$ ist.

Aufgabe 45 Zeigen Sie, dass die Klassen P, NP und $\mathrm{co\text{-}NP}$ unter disjunktiven und majority-Reduktionen abgeschlossen sind.

Aufgabe 46 Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ additiv ist: $\mathit{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathit{Var}(X_i)$.

Aufgabe 47 Eine nichtdeterministische Orakel-Turingmaschine (NOTM) N heißt *strong* unter Orakel B, falls N^B bei jeder Eingabe x entweder mindestens eine akzeptierende oder mindestens eine verwerfende Rechnung ausführt, aber nicht beides. Eine NPOTM ist eine polynomiell zeitbeschränkte NOTM. Zeigen Sie:

$$\mathrm{NP}^B \cap \mathrm{co\text{-}NP}^B = \{L(N^B) \mid N \text{ ist eine NPOTM, die strong unter } B \text{ ist}\}.$$

Aufgabe 48 (schriftlich, 10 Punkte)

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \mathrm{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \mathrm{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\mathrm{P/poly} = \mathrm{P(SPARSE)} = \mathrm{P(TALLY)}.$$