

Übungsblatt 12

Aufgabe 44 Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *und-Funktion* für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x\#y) \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* ist analog definiert. Sei \mathcal{C} eine unter \leq_m^{\log} -Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei C ein \mathcal{C} -vollständiges Problem. Zeigen Sie:

- \mathcal{C} ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn C eine und-Funktion in FL hat.
- GA hat eine oder-Funktion in FL.
- SAT und GI haben und- und oder-Funktionen in FL.
- NP, co-NP und $\text{NP} \cap \text{co-NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
- $\text{NP} \cup \text{co-NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist.

Aufgabe 45 Zeigen Sie, dass die Klassen P, NP und co-NP unter disjunktiven und majority-Reduktionen abgeschlossen sind.

Aufgabe 46 Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n additiv ist: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$.

Aufgabe 47 Eine nichtdeterministische Orakel-Turingmaschine (NOTM) N heißt *strong* unter Orakel B , falls N^B bei jeder Eingabe x entweder mindestens eine akzeptierende oder mindestens eine verwerfende Rechnung ausführt, aber nicht beides. Eine NPOTM ist eine polynomiell zeitbeschränkte NOTM. Zeigen Sie:

$$\text{NP}^B \cap \text{co-NP}^B = \{L(N^B) \mid N \text{ ist eine NPOTM, die strong unter } B \text{ ist}\}.$$

Aufgabe 48 (schriftlich, 10 Punkte)

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \text{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \text{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\text{P/poly} = \text{P}(\text{SPARSE}) = \text{P}(\text{TALLY}).$$