

Vorlesungsskript

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2020/21

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

18. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Reguläre Sprachen	3
2.1	Endliche Automaten	3
2.2	Nichtdeterministische endliche Automaten	5
2.3	Reguläre Ausdrücke	8
2.4	Relationalstrukturen	11
2.4.1	Ordnungs- und Äquivalenzrelationen	14
2.4.2	Abbildungen	17
2.4.3	Homo- und Isomorphismen	18
2.5	Minimierung von DFAs	19
2.6	Das Pumping-Lemma	24
2.7	Grammatiken	25
3	Kontextfreie Sprachen	28
3.1	Chomsky-Normalform	30
3.2	Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen	33
3.3	Der CYK-Algorithmus	34
3.4	Kellerautomaten	36
3.5	Deterministisch kontextfreie Sprachen	42
4	Kontextsensitive Sprachen	46
4.1	Kontextsensitive Grammatiken	46
4.2	Turingmaschinen	46
4.3	Linear beschränkte Automaten	48

5	Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen	52
5.1	Unentscheidbarkeit des Halteproblems	55
6	Komplexität von algorithmischen Problemen	58
6.1	Zeitkomplexität	58
6.2	NP-Vollständigkeit	59
6.3	Platzkomplexität	60
6.4	Aussagenlogische Erfüllbarkeitsprobleme	62

1 Einleitung

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischen Modellen für Maschinentypen von unterschiedlicher Berechnungskraft. Unter anderem lernen wir das Rechenmodell der Turingmaschine (TM) kennen, mit dem sich alle anderen Rechenmodelle simulieren lassen. Ein weiteres wichtiges Thema der Vorlesung ist die Frage, welche Probleme algorithmisch lösbar sind und wo die Grenzen der Berechenbarkeit verlaufen.

Schließlich untersuchen wir die Komplexität von algorithmischen Problemen, indem wir den benötigten Rechenaufwand möglichst gut nach oben und unten abschätzen. Eine besondere Rolle spielen hierbei die NP-vollständigen Probleme, deren Komplexität bis heute offen ist.

Themen der Vorlesung

- Welche Rechenmodelle sind für bestimmte Aufgaben adäquat? (Automatentheorie)
- Welche Probleme sind lösbar? (Berechenbarkeitstheorie)
- Welcher Aufwand ist zur Lösung eines algorithmischen Problems nötig? (Komplexitätstheorie)

In den theoretisch orientierten Folgeveranstaltungen wird es dagegen um folgende Themen gehen.

Thema der Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? (Algorithmik)

Thema der Vorlesung Logik in der Informatik

- Mathematische Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung (Aussagenlogik, Prädikatenlogik)

Die wichtigsten **Lernziele der Vorlesung** sind:

- Überblick über die wichtigsten Rechenmodelle (Automaten) wie z.B.
 - endliche Automaten
 - Kellerautomaten
 - Turingmaschinen
 - Registermaschinen
 - Schaltkreise
- Charakterisierung der Klassen aller mit diesen Rechenmodellen lösbaren Probleme durch
 - unterschiedliche Typen von formalen Grammatiken
 - Abschlusseigenschaften unter geeigneten Sprachoperationen
 - Reduzierbarkeit auf typische Probleme (Vollständigkeit)
- Erkennen von Grenzen der Berechenbarkeit
- Klassifikation wichtiger algorithmischer Probleme nach ihrer Komplexität

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. Es gibt viele unterschiedliche mathematische Modelle für Rechenmaschinen. Diese können sich in ihrer Berechnungskraft unterscheiden. Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann. Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.

- endliche Automaten (DFA, NFA)
- Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten **Muhammed Al Chwarizmi** (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale

1 Einleitung

Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er für jede zulässige *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte *Ausgabe* liefert. Eine wichtige Rolle spielen *Entscheidungsprobleme*, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird. Die (maximale) Anzahl der Rechenschritte bei allen möglichen Eingaben ist nicht beschränkt, d.h. mit wachsender Eingabelänge kann auch die Rechenzeit beliebig anwachsen. Die Beschreibung eines Algorithmus muss jedoch endlich sein. Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein. Diese werden über einem *Eingabealphabet* Σ kodiert.

Definition 1.

- a) Ein **Alphabet** ist eine linear geordnete Menge $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ von $m \geq 1$ **Zeichen** $a_1 < \dots < a_m$.
- b) Eine Folge $x = x_1 \dots x_n$ von $n \geq 0$ Zeichen $x_i \in \Sigma$ heißt **Wort** der **Länge** n über Σ .
- c) Die Länge von x wird mit $|x|$ und die Menge aller Wörter der Länge n über Σ wird mit Σ^n bezeichnet.
- d) Die Menge aller Wörter über Σ ist

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$$

- e) Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das **leere Wort**, welches wir mit ε bezeichnen, d.h. $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$.
- f) Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **Sprache** über dem Alphabet Σ .

Beispiel 2. Sei Σ ein Alphabet. Dann sind $\emptyset, \Sigma^*, \Sigma$ und $\{\varepsilon\}$ Sprachen über Σ . Die Sprache $\emptyset$ enthält keine Wörter und heißt **leere Sprache**. Die Sprache Σ^* enthält dagegen alle Wörter über Σ , während die Sprache Σ alle Wörter über Σ der Länge 1 enthält. Die Sprache $\{\varepsilon\}$ enthält nur das leere Wort, ist also einelementig. Einelementige Sprachen werden auch als **Singletonsprachen** bezeichnet.

Da Sprachen Mengen sind, können wir sie bzgl. Inklusion vergleichen. Zum Beispiel gilt

$$\emptyset \subseteq \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*.$$

Wir können Sprachen auch vereinigen, schneiden und komplementieren. Seien A und B Sprachen über Σ . Dann ist

- $A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A, x \in B\}$ der **Schnitt** von A und B ,
- $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\}$ die **Vereinigung** von A und B , und
- $\bar{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$ das **Komplement** von A .

Neben den Mengenoperationen gibt es auch spezielle Sprachoperationen.

Definition 3.

- Das **Produkt** (**Verkettung**, **Konkatenation**) der Sprachen A und B ist

$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}.$$

Ist $A = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für $\{x\}B$ auch einfach xB .

- Die **n -fache Potenz** A^n einer Sprache A ist induktiv definiert durch

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ A^{n-1}A, & n > 0. \end{cases}$$

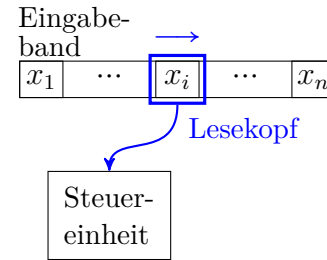
- Die **Sternhülle** A^* einer Sprache A ist $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$ und die **Plushülle** A^+ von A ist $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n = AA^*$.

2 Reguläre Sprachen

Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B. endliche Automaten (DFA, NFA), Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

2.1 Endliche Automaten

Ein endlicher Automat führt bei einer Eingabe der Länge n nur n Rechenschritte aus. Um die gesamte Eingabe lesen zu können, muss der Automat also in jedem Schritt ein Zeichen der Eingabe verarbeiten.



Definition 4. Ein **endlicher Automat** (kurz: DFA; deterministic finite automaton) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ das **Eingabealphabet**,
- $\delta: Z \times \Sigma \rightarrow Z$ die **Überföhrungsfunktion**,
- $q_0 \in Z$ der **Startzustand** und
- $E \subseteq Z$ die Menge der **Endzustände** ist.

Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

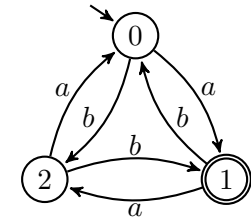
Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt **Rechnung** von $M(x_1 \dots x_n)$, falls $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt. Sie heißt **akzeptierend**, falls $q_n \in E$ ist, und andernfalls **verwerfend**. Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als **regulär** bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Beispiel 5. Betrachte den DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überföhrungsfunktion

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird meist durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet.

Bei Eingabe $w_1 = aba$ führt M die akzeptierende Rechnung $0, 1, 0, 1$ durch, d.h. $w_1 \in L(M)$. Dagegen verwirft M das Wort $w_2 = abba$ (verwerfende Rechnung: $0, 1, 0, 2, 0$). $\triangleleft$

Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird. Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta}: Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$$

induktiv wie folgt definieren. Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

Die von M erkannte Sprache lässt sich nun elegant durch

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

beschreiben.

Behauptung 6. Der DFA M aus Beispiel 5 akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\},$$

wobei $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a in x bezeichnet und $i \equiv_m j$ (in Worten: i ist kongruent zu j modulo m) bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist.

Beweis. Da M nur den Endzustand 1 hat, ist $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$, d.h. wir müssen folgende Äquivalenz zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1.$$

Hierzu reicht es, die Kongruenz

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

zu beweisen, wofür wir Induktion über die Länge n von x benutzen.

Induktionsanfang ($n = 0$): klar, da $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) - \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$. Nach IV gilt dann

$$i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n).$$

Wegen $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$ und $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$ folgt daher

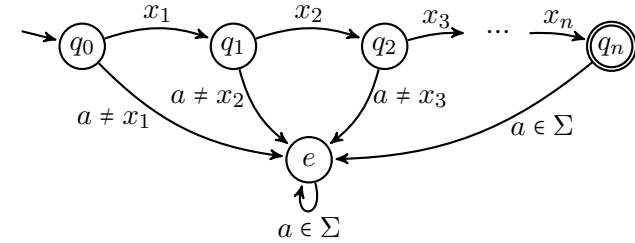
$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &= \#_a(x) - \#_b(x). \end{aligned}$$

und somit

$$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x). \quad \blacksquare$$

Beobachtung 7. Alle Singletonsprachen sind regulär.

Beweis. Für jedes Wort $x = x_1 \dots x_n$ existiert ein DFA M_x mit $L(M_x) = \{x\}$:



Formal ist M_x also das Tupel $(Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_n, e\}$, $E = \{q_n\}$ und der Überföhrungsfunktion

$$\delta(q, a_j) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i \text{ für ein } i \text{ mit } 0 \leq i \leq n-1 \text{ und } a_j = x_{i+1} \\ e, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Als nächstes betrachten wir Abschlusseigenschaften der Sprachklasse REG.

Definition 8. Ein **k-stelliger Sprachoperator** ist eine Abbildung op , die k Sprachen $L_1, \dots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.

Beispiel 9. Der Schnittoperator $\cap$ bildet zwei Sprachen L_1 und L_2 auf die Sprache $L_1 \cap L_2$ ab. $\triangleleft$

Definition 10. Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter op **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

Der **Abschluss** von $\mathcal{K}$ unter op ist die bzgl. Inklusion kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter op abgeschlossen ist.

Beispiel 11. Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$ besteht aus allen Singletonsprachen und der leeren Sprache.

Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cup$ besteht aus allen nicht-leeren endlichen Sprachen.

Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$, $\cup$ und Komplement besteht aus allen endlichen und co-endlichen Sprachen.* $\triangleleft$

Definition 12. Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ bezeichne $\text{co-}\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in $\mathcal{C}$.

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplementbildung abgeschlossen ist, wenn $\text{co-}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ist.

Beobachtung 13. Mit $L_1, L_2 \in \text{REG}$ sind auch die Sprachen $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$, $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \cup L_2$ regulär.

Beweis. Sind $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_0, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$, so akzeptiert der DFA

$$\overline{M_1} = (Z_1, \Sigma, \delta_1, q_0, Z_1 \setminus E_1)$$

das Komplement $\overline{L_1}$ von L_1 . Der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von L_1 und L_2 wird dagegen von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_0, q_0), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((q, p), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(p, a))$$

akzeptiert (M wird auch **Kreuzproduktautomat** genannt). Wegen $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ ist dann aber auch die Vereinigung von L_1 und L_2 regulär. (Wie sieht der zugehörige DFA aus?) ■

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^$ ist co-endlich, wenn ihr Komplement $\bar{L}$ endlich ist.

Aus Beobachtung 13 folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind. Da die in Beispiel 5 betrachtete Sprache weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob REG neben den mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement unter weiteren Operationen wie etwa Produkt oder Sternhülle abgeschlossen ist. Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Klasse REG als der Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar (und somit auch unter diesen Operationen abgeschlossen) ist.

Beim Versuch, einen endlichen Automaten für das Produkt $L(M_1)L(M_2)$ zweier regulärer Sprachen zu konstruieren, stößt man auf die Schwierigkeit, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden. Unter Verwendung eines nichtdeterministischen endlichen Automaten lässt sich dieses Problem jedoch leicht lösen, da dieser den richtigen Zeitpunkt „erraten“ kann. Im nächsten Abschnitt werden wir nachweisen, dass auch nichtdeterministische endliche Automaten nur reguläre Sprachen erkennen können.

2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition 14. Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (kurz: *NFA*; *nondeterministic finite automaton*) $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ist ähnlich aufgebaut wie ein DFA, nur dass er mehrere Startzustände (zusammengefasst in der Menge $Q_0 \subseteq Z$) haben kann und seine Überföhrungsfunktion die Form

$$\Delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die **Potenzmenge** (also die Menge aller Teilmengen) von Z . Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet. Die von N akzeptierte Sprache ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt **Rechnung** von $N(x_1 \dots x_n)$, falls $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt.

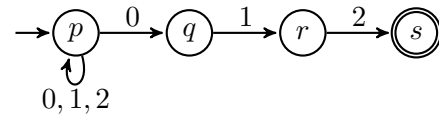
Ein NFA N kann bei einer Eingabe x also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen. Ein Wort x gehört genau dann zu $L(N)$, wenn $N(x)$ mindestens eine akzeptierende Rechnung hat.

Im Gegensatz zu einem DFA, dessen Überföhrungsfunktion auf der gesamten Menge $Z \times \Sigma$ definiert ist, kann ein NFA „stecken bleiben“. Das ist dann der Fall, wenn er in einen Zustand q gelangt, in dem das nächste Eingabezeichen x_i wegen $\Delta(q, x_i) = \emptyset$ nicht gelesen werden kann.

Beispiel 15. Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ mit Zustandsmenge $Z = \{p, q, r, s\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, Start- und Endzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und $E = \{s\}$ sowie der Überföhrungsfunktion

Δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{p\}$	$\emptyset$	$\{s\}$	$\emptyset$

Graphische Darstellung:



Offensichtlich akzeptiert N die Sprache $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. $\triangleleft$

Beobachtung 16. Sind $N_i = (Z_i, \Sigma, \Delta_i, Q_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) NFAs, so werden auch die Sprachen $L(N_1)L(N_2)$ und $L(N_1)^*$ von einem NFA erkannt.

Beweis. Sei $L_i = L(N_i)$. Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ annehmen. Dann akzeptiert der NFA

$$N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta_3, Q_1, E)$$

mit

$$\Delta_3(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \emptyset \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache L_1L_2 .

$L_1L_2 \subseteq L(N)$: Seien $x = x_1 \dots x_k \in L_1, y = y_1 \dots y_l \in L_2$ und seien $q_0, \dots, q_k$ und $p_0, \dots, p_l$ akzeptierende Rechnungen von $N_1(x)$ und $N_2(y)$. Dann ist $q_0, \dots, q_k, p_1, \dots, p_l$ eine akz. Rechnung von $N(xy)$, da $q_0 \in Q_1$ und $p_l \in E_2$ ist, und

- im Fall $l \geq 1$ wegen $q_k \in E_1, p_0 \in Q_2$ und $p_1 \in \Delta_2(p_0, y_1)$ zudem $p_1 \in \Delta(q_k, y_1)$ und
- im Fall $l = 0$ wegen $q_k \in E_1$ und $p_l \in Q_2 \cap E_2$ zudem $q_k \in E$ ist.

$L(N) \subseteq L_1L_2$: Sei $x = x_1 \dots x_n \in L(N)$ und sei $q_0, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N(x)$. Dann gilt $q_0 \in Q_1, q_n \in E, q_0, \dots, q_i \in Z_1$ und $q_{i+1}, \dots, q_n \in Z_2$ für ein $i \leq n$. Wir zeigen, dass ein $q \in Q_2$ existiert, so dass $q_0, \dots, q_i$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \dots x_i)$ und $q, q_{i+1}, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \dots x_n)$ ist.

- Im Fall $i < n$ impliziert der Übergang $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$, dass $q_i \in E_1$ (also $q_0, \dots, q_i$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \dots x_i)$) und $q_{i+1} \in \Delta_2(q, x_{i+1})$ für ein $q \in Q_2$ ist. Zudem ist $q_n \in E \cap Z_2 = E_2$ (also $q, q_{i+1}, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \dots x_n)$).
- Im Fall $i = n$ ist $q_n \in E \cap Z_1$, was $q_n \in E_1$ und $Q_2 \cap E_2 \neq \emptyset$ impliziert (also ist $q_0, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \dots x_n)$ und es gibt ein $q \in Q_2$, so dass q eine akz. Rechnung von $N_2(\varepsilon)$ ist).

Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass der NFA

$$N^* = (Z_1 \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \Delta_4, Q_1 \cup \{q_{neu}\}, E_1 \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\Delta_4(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_1} \Delta_1(q, a), & p \in E_1, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache L_1^* akzeptiert. ■

Satz 17 (Rabin und Scott).

$\text{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar, da jeder DFA auch als NFA aufgefasst werden kann. Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ einen DFA $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta, Q_0, E')$ mit $L(M) = L(N)$. Wir definieren die Überföhrungsfunktion $\delta : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ von M mittels

$$\delta(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q, a).$$

Die Menge $\delta(Q, a)$ enthält also alle Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest. Intuitiv bedeutet dies, dass der DFA M den NFA N simuliert, indem M in seinem aktuellen Zustand Q die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte. Für die Erweiterung $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ von δ (siehe Seite 3) können wir nun folgende Behauptung zeigen.

Behauptung. $\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält alle Zustände, die N ausgehend von einem Startzustand nach Lesen von x erreichen kann.

Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Länge n von x .

Induktionsanfang ($n = 0$): klar, da $\hat{\delta}(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

Induktionsschritt ($n - 1 \rightsquigarrow n$): Sei $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}(Q_0, x_1 \dots x_{n-1})$$

alle Zustände, die $N(x)$ in genau $n - 1$ Schritten erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}(Q_0, x) = \delta(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \Delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}(Q_0, x)$ alle Zustände, die $N(x)$ in genau n Schritten erreichen kann.

Deklarieren wir nun diejenigen Teilmengen $Q \subseteq Z$, die mindestens einen Endzustand von N enthalten, als Endzustände des **Potenzmengenautomaten** M , d.h.

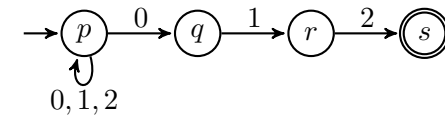
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\},$$

so folgt für alle Wörter $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} x \in L(N) &\Leftrightarrow N(x) \text{ kann in genau } |x| \text{ Schritten einen Endzustand} \\ &\text{erreichen} \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(Q_0, x) \in E' \\ &\Leftrightarrow x \in L(M). \end{aligned}$$

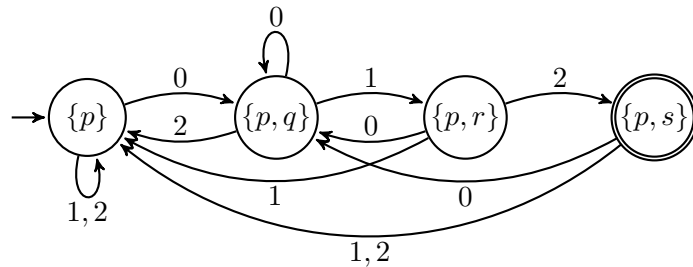
■

Beispiel 18. Für den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ aus Beispiel 15



ergibt die Konstruktion des vorigen Satzes den folgenden DFA M (nach Entfernen aller vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus nicht erreichbaren Zustände):

δ	0	1	2
$Q_0 = \{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$Q_1 = \{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$Q_2 = \{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$Q_3 = \{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



◁

Im obigen Beispiel wurden für die Konstruktion des DFA M aus dem NFA N nur 4 der insgesamt $2^{\|Z\|} = 16$ Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ nicht vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ erreichbar sind. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten benötigt werden (siehe Übungen).

Korollar 19. Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Schnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

2.3 Reguläre Ausdrücke

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon überzeugt, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen können:

$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen kennenlernen:

REG ist die Klasse aller Sprachen, die sich mittels der Operationen Vereinigung, Schnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus der leeren Menge und den Singleton-sprachen bilden lassen.

Tatsächlich kann hierbei sogar auf die Schnitt- und Komplementbildung verzichtet werden.

Definition 20. Die Menge der **regulären Ausdrücke** γ (über einem Alphabet Σ) und die durch γ dargestellte Sprache $L(\gamma)$ sind induktiv wie folgt definiert. Die Symbole $\emptyset$, ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke, die

- die leere Sprache $L(\emptyset) = \emptyset$,
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und
- für jedes Zeichen $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$

beschreiben. Sind α und β reguläre Ausdrücke, die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke, die die Sprachen

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$,
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ und
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$

beschreiben.

Bemerkung 21.

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende **Präzedenzordnung**: Der Sternoperator $*$ bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator. Für $((a|b(c)^*)|d)$ können wir also kurz $a|bc^*|d$ schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$.

Beispiel 22. Die regulären Ausdrücke ϵ^* , $\emptyset^*$, $(0|1)^*00$ und $\epsilon 0|\emptyset 1^*$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	ϵ^*	$\emptyset^*$	$(0 1)^*00$	$\epsilon 0 \emptyset 1^*$
$L(\gamma)$	$\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$	$\emptyset^* = \{\epsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

◁

Beispiel 23. Betrachte nebenstehenden DFA M .
Um für die von M erkannte Sprache

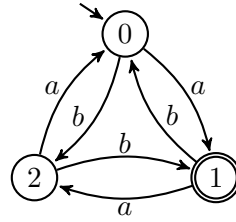
$$L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

einen regulären Ausdruck zu finden, betrachten wir zunächst die Sprache $L_{0,0}$ aller Wörter x , die den DFA M ausgehend vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen. Weiter sei $L_{0,0}^{\#0}$ die Sprache aller solchen Wörter $w \in L_{0,0}$, die den Zustand 0 nur zu Beginn und am Ende (aber nicht zwischendurch) besuchen. Dann setzt sich jedes $x \in L_{0,0}$ aus beliebig vielen Teilwörtern $w_1, \dots, w_k \in L_{0,0}^{\#0}$ zusammen, d.h. $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\#0})^*$.

Jedes $w \neq \epsilon$ in $L_{0,0}^{\#0}$ beginnt entweder mit einem a (Übergang von 0 nach 1) oder mit einem b (Übergang von 0 nach 2). Im ersten Fall folgt eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ab (Wechsel zwischen 1 und 2), an die sich entweder das Suffix aa (Rückkehr von 1 nach 0 über 2) oder das Suffix b (direkte Rückkehr von 1 nach 0) anschließt. Analog folgt im zweiten Fall eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ba (Wechsel zwischen 2 und 1), an die sich entweder das Suffix a (direkte Rückkehr von 2 nach 0) oder das Suffix bb (Rückkehr von 2 nach 0 über 1) anschließt. Daher lässt sich $L_{0,0}^{\#0}$ durch den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,0}^{\#0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb) \mid \epsilon$$

beschreiben. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die Sprache $L_{0,1}^{\#0}$ aller Wörter, die M ausgehend von 0 in den Zustand 1 überführen, ohne



dass zwischendurch der Zustand 0 nochmals besucht wird, durch den regulären Ausdruck $\gamma_{0,1}^{\#0} = (a|bb)(ab)^*$ beschreibbar ist. Somit erhalten wir für $L(M)$ den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,1} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*(a|bb)(ab)^*.$$

◁

Satz 24. $\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\} = \text{REG}$.

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist klar, da die Basisausdrücke $\emptyset$, ϵ und a , $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist (siehe Beobachtungen 13 und 16).

Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem DFA M einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$. Sei also $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, wobei wir annehmen können, dass $Z = \{1, \dots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist. Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form

$$L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$$

darstellen. Folglich reicht es zu zeigen, dass die Sprachen $L_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind. Hierzu betrachten wir die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \hat{\delta}(p, x_1 \dots x_n) = q \text{ und für} \\ i = 1, \dots, n-1 \text{ gilt } \hat{\delta}(p, x_1 \dots x_i) \leq r \end{array} \right\}.$$

Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ anzugeben. Im Fall $r = 0$ enthält

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\epsilon\}, & p = q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

nur Buchstaben (und eventuell das leere Wort) und ist somit leicht durch einen regulären Ausdruck $\gamma_{p,q}^0$ beschreibbar. Wegen

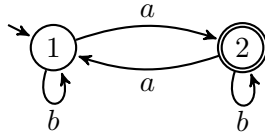
$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r$$

lassen sich aus den regulären Ausdrücken $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ leicht reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}^{r+1}$ gewinnen:

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r | \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r.$$

■

Beispiel 25. Betrachte den DFA



Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^2 = L(\gamma_{1,2}^2).$$

Um $\gamma_{1,2}^2$ zu berechnen, benutzen wir die Rekursionsformel

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r | \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^2 &= \gamma_{1,2}^1 | \gamma_{1,2}^1 (\gamma_{2,2}^1)^* \gamma_{2,2}^1, \\ \gamma_{1,2}^1 &= \gamma_{1,2}^0 | \gamma_{1,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0, \\ \gamma_{2,2}^1 &= \gamma_{2,2}^0 | \gamma_{2,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0. \end{aligned}$$

Um den regulären Ausdruck $\gamma_{1,2}^2$ für $L(M)$ zu erhalten, genügt es also, die regulären Ausdrücke $\gamma_{1,1}^0$, $\gamma_{1,2}^0$, $\gamma_{2,1}^0$, $\gamma_{2,2}^0$, $\gamma_{1,2}^1$ und $\gamma_{2,2}^1$ zu berechnen:

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	ϵb	a	a	ϵb
1	-	$\underbrace{a (\epsilon b)(\epsilon b)^* a}_{b^* a}$	-	$\underbrace{(\epsilon b) a(\epsilon b)^* a}_{\epsilon b ab^* a}$
2	-	$\underbrace{b^* a b^* a(\epsilon b ab^* a)^* (\epsilon b ab^* a)}_{b^* a(b ab^* a)^*}$	-	-

◁

Korollar 26. Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär (d.h. es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$),
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- L lässt sich mit den Operationen $\cap$, $\cup$, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Wir werden bald noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken. Zuvor befassen wir uns jedoch mit dem Problem, DFAs zu minimieren. Dabei spielen Relationen (insbesondere Äquivalenzrelationen) eine wichtige Rolle.

2.4 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i -stellige Relation auf A , d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \dots, R_n)$ **Relationalstruktur**. Die Menge A heißt **Grundmenge**, **Trägermenge** oder **Individuenbereich** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine **(binäre) Relation** auf A . Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die **Infix-Schreibweise** aRb benutzt.

Beispiel 27.

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und $M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}$.
- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und $B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}$.
- $(P(M), \subseteq)$, wobei $P(M)$ die Potenzmenge einer beliebigen Menge M und $\subseteq$ die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von M ist.
- (A, Id_A) , wobei $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ die **Identität auf A** ist.
- $(\mathbb{R}, \leq)$.
- $(\mathbb{Z}, \mid)$, wobei $\mid$ die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h. $a \mid b$, falls ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ existiert). $\triangleleft$

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen **Schnitt**, **Vereinigung**, **Komplement** und **Differenz** definiert. Seien R und S Relationen auf A , dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

Sei allgemeiner $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A . Dann sind der **Schnitt über $\mathcal{M}$** und die **Vereinigung über $\mathcal{M}$** folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Die **transponierte (konverse) Relation** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Z.B. ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Seien R und S Relationen auf A . Das **Produkt** oder die **Komposition** von R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel 28. Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. $\triangleleft$

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS . Das n -fache Relationenprodukt $R \circ \dots \circ R$ von R wird mit R^n bezeichnet. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht: Das n -fache Relationenprodukt R^n von R sollte nicht mit dem n -fachen kartesischen Produkt $R \times \dots \times R$ der Menge R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation auf A . Dann heißt R

reflexiv ,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv ,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex ,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv ,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen können.

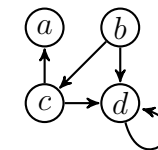
Beispiel 29.

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft *symmetrisch*, i.a. jedoch weder *symmetrisch* noch *asymmetrisch* noch *antisymmetrisch*.
- Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar *symmetrisch*, aber weder *reflexiv* noch *transitiv* und somit keine Äquivalenzrelation.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist *irreflexiv*, *asymmetrisch*, *transitiv* und *semikonnex* und somit eine *lineare Striktordnung*.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(P(M), \subseteq)$ sind *reflexiv*, *antisymmetrisch* und *transitiv* und somit *Ordnungen*.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist auch *konnex* und somit eine *lineare Ordnung*.
- $(P(M), \subseteq)$ ist zwar im Fall $\|M\| \leq 1$ *konnex*, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder *semikonnex* noch *konnex*. $\triangleleft$

Graphische Darstellung von Relationen

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen **gerichteten Graphen** (oder **Digraphen**) $G = (V, E)$ mit **Knotenmenge** $V = A$ und **Kantenmenge** $E = R$ veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **benachbart** oder **adjazent**.

Beispiel 30. Für die Relation (A, R) mit $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ erhalten wir folgende graphische Darstellung.



Der **Ausgangsgrad** eines Knotens $x \in V$ ist $\deg^+(x) = \|R[x]\|$, wobei $R[x] = \{y \in V \mid xRy\}$ die Menge der **Nachfolger** von x ist. Entsprechend ist $\deg^-(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der **Eingangsgrad** von x und $R^{-1}[x] = \{y \in V \mid yRx\}$ die Menge der **Vorgänger** von x . Falls R symmetrisch ist, werden die Pfeilspitzen meist weggelassen. In diesem Fall ist $d(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der **Grad** von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ heißt die **Nachbarschaft** von x . Ist G zudem **schleifenfrei** (d.h. R ist irreflexiv), erhalten wir einen (**ungerichteten**) **Graphen**. Eine irreflexive und symmetrische Relation R wird meist als Menge der ungeordneten Paare $E = \{\{a, b\} \mid aRb\}$ notiert.

Darstellung durch Adjazenzmatrizen

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich durch eine boolesche $n \times n$ -Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Darstellung durch Adjazenzlisten

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolger in Form einer Liste zuordnet. Für obige Relation R erhalten

wir folgende Listen:

$x:$	$R[x]$
$a:$	-
$b:$	c, d
$c:$	a, d
$d:$	d

Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$ -Matrizen für R und S , so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup \{S[y] \mid y \in R[x]\} = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Beispiel 31. Betrachte die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$ auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
<i>Digraph</i>				
<i>Adjazenzmatrix</i>	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
<i>Adjazenzliste</i>	$a: a, c$ $b: -$ $c: b, d$ $d: -$	$a: b$ $b: -$ $c: -$ $d: a, c$	$a: b$ $b: -$ $c: a, c$ $d: -$	$a: -$ $b: -$ $c: -$ $d: a, b, c, d$

◁

Beobachtung: Das Beispiel zeigt, dass das Relationenprodukt nicht kommutativ ist, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Manchmal steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Relation R durch eine möglichst kleine Modifikation in eine Relation R' mit vorgegebenen Eigenschaften zu überführen. Will man dabei alle in R enthaltenen Paare beibehalten, dann sollte R' aus R durch Hinzufügen möglichst weniger Paare hervorgehen.

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge reflexiver (bzw. transitiver oder symmetrischer) Relationen wieder reflexiv (bzw. transitiv oder symmetrisch) ist. Folglich existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste reflexive (bzw. transitive oder symmetrische) Relation R' , die R enthält.

Definition 32. Sei R eine Relation auf A .

- Die **reflexive Hülle** von R ist

$$h_{\text{refl}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **symmetrische Hülle** von R ist

$$h_{\text{sym}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die **transitive Hülle** von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **Äquivalenzhülle** von R ist

$$h_{\text{äq}}(R) = \bigcap \{S \mid S \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ und } R \subseteq S\}.$$

Satz 33. Sei R eine Relation auf A .

- (i) $h_{\text{refl}}(R) = R \cup \text{Id}_A$,
- (ii) $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$,
- (iii) $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$,
- (iv) $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$,
- (v) $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$.

Beweis. Siehe Übungen. ■

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, dass ein Paar (a, b) genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R ist, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$, d.h. es gibt Elemente $x_0, \dots, x_n \in A$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und

$$x_0 R x_1 R x_2 \dots x_{n-1} R x_n.$$

In der Graphentheorie nennt man $x_0, \dots, x_n$ einen **Weg** der Länge n von a nach b . Ein Digraph G heißt **zusammenhängend**, wenn es für je zwei Knoten a und b einen Weg von a nach b oder einen Weg von b nach a gibt. G heißt **stark zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten a einen Weg zu jedem Knoten b in G gibt.

2.4.1 Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Wir betrachten zunächst Äquivalenzrelationen, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv definiert sind.

Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die **von x repräsentierte Äquivalenzklasse** und bezeichnet sie mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$. Eine Menge $S \subseteq A$ heißt **Repräsentantensystem**, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 34.

- Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität. Offenbar bilden alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung)

jeweils eine Äquivalenzklasse. Daher wird ein Repräsentantensystem beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.

- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie". Hier bildet jeder Jahrgang eine Äquivalenzklasse.
- Auf $\mathbb{Z}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m ". Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_m r\}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Reste $0, 1, \dots, m-1$ gebildet. $\triangleleft$

Die (bzgl. Inklusion) kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die **Identität** Id_A , die größte die **Allrelation** $A \times A$. Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $[x]_{Id_A} = \{x\}$ für alle $x \in A$, und die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $[x]_{A \times A} = A$ für jedes $x \in A$. Die Identität Id_A hat nur ein Repräsentantensystem, nämlich A . Dagegen kann jede Singletonmenge $\{x\}$ mit $x \in A$ als Repräsentantensystem für die Allrelation $A \times A$ fungieren.

Definition 35. Eine Familie $\{B_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $B_i \subseteq A$ heißt **Partition** der Menge A , falls gilt:

- die Mengen B_i **überdecken** A , d.h. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ und
- die Mengen B_i sind **paarweise disjunkt**, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $B_i \neq B_j$ gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Wie der nächste Satz zeigt, bilden die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation E eine Partition $\{[x] \mid x \in A\}$ von A . Diese Partition wird auch **Quotienten-** oder **Faktormenge** genannt und mit A/E bezeichnet. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von E wird auch als der **Index** von E bezeichnet.

Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten. Folglich ist

jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E . E bewirkt also eine **feinere** Partitionierung als E' . Demnach ist die Identität die **feinste** und die Allrelation die **größte** Äquivalenzrelation.

Satz 36. Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- E ist eine Äquivalenzrelation auf A .
- Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit

$$xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i.$$

Beweis.

- $\Rightarrow$ (ii) Sei E eine Äquivalenzrelation auf A . Wir zeigen, dass dann $\{E[x] \mid x \in A\}$ eine Partition von A mit der gewünschten Zusatzeigenschaft bildet:

Da E reflexiv ist, gilt xEx und somit $x \in E[x]$, d.h. $A = \bigcup_{x \in A} E[x]$.

Ist $E[x] \cap E[y] \neq \emptyset$ und $u \in E[x] \cap E[y]$, so folgt $E[x] = E[y]$:

$$z \in E[x] \Leftrightarrow xEz \xLeftrightarrow^{xEu} uEz \xLeftrightarrow^{yEu} yEz \Leftrightarrow z \in E[y]$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \exists z \in A : x, y \in E[z] &\Leftrightarrow \exists z : z \in E[x] \cap E[y] \\ &\Leftrightarrow E[x] = E[y] \xLeftrightarrow^{y \in E[y]} xEy \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ (i) Existiert umgekehrt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$, so ist E

- reflexiv, da zu jedem $x \in A$ eine Menge B_i mit $x \in B_i$ existiert,
- symmetrisch, da aus $x, y \in B_i$ auch $y, x \in B_i$ folgt, und
- transitiv, da aus $x, y \in B_i$ und $y, z \in B_j$ wegen $y \in B_i \cap B_j$ die Gleichheit $B_i = B_j$ und somit $x, z \in B_i$ folgt. $\blacksquare$

Als nächstes betrachten wir Ordnungsrelationen, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, antisymmetrisch und transitiv definiert sind.

Beispiel 37.

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, |)$ sind Ordnungen. $(\mathbb{Z}, |)$ ist keine Ordnung, aber eine Quasiordnung.
- Für jede Menge M ist die relationale Struktur $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ eine Ordnung. Diese ist nur im Fall $\|M\| \leq 1$ linear.
- Ist R eine Relation auf A und $B \subseteq A$, so ist $R_B = R \cap (B \times B)$ die Einschränkung von R auf B .
- Einschränkungen von (linearen) Ordnungen sind ebenfalls (lineare) Ordnungen.
- Beispielsweise ist $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Einschränkung von $(\mathbb{R}, \leq)$ auf $\mathbb{Q}$ und $(\mathbb{N}, |)$ die Einschränkung von $(\mathbb{Z}, |)$ auf $\mathbb{N}$. $\triangleleft$

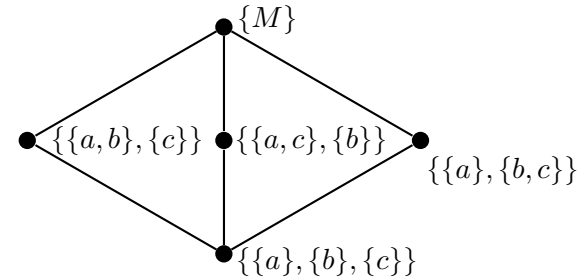
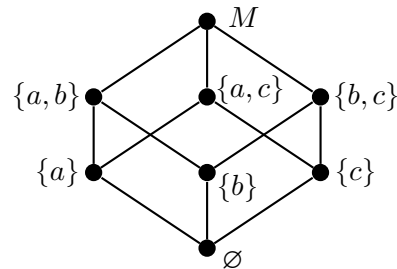
Ordnungen lassen sich sehr anschaulich durch Hasse-Diagramme darstellen. Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \cap \text{Id}_A$. Um die Ordnung $\leq$ in einem **Hasse-Diagramm** darzustellen, wird nur der Graph der Relation

$$\leq = < \cup <^2, \text{ d.h. } x \leq y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

gezeichnet. Für $x < y$ sagt man auch, y ist **oberer Nachbar** von x . Weiterhin wird im Fall $x < y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

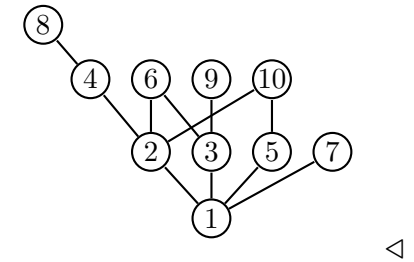
Beispiel 38.

Das Hasse-Diagramm rechts zeigt die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von $M = \{a, b, c\}$.



Das Hasse-Diagramm links zeigt die feiner-Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$.

Schränken wir die "teilt"-Relation auf die Menge $\{1, 2, \dots, 10\}$ ein, so erhalten wir nebenstehendes Hasse-Diagramm.



Definition 39. Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei b ein Element in einer Teilmenge $B \subseteq A$.

- b heißt **kleinstes Element** oder **Minimum** von B (kurz $b = \min B$), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b heißt **größtes Element** oder **Maximum** von B (kurz $b = \max B$), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b heißt **minimal** in B , falls es in B kein kleineres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b heißt **maximal** in B , falls es in B kein größeres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

Bemerkung 40. Da Ordnungen antisymmetrisch sind, kann es in jeder Teilmenge B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Die Anzahl der minimalen und maximalen Elemente in B kann dagegen beliebig groß sein.

Definition 41. Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

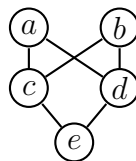
- Jedes Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt **untere** und jedes $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt **obere Schranke** von B .
- B heißt **nach oben beschränkt**, wenn B eine obere Schranke hat, und **nach unten beschränkt**, wenn B eine untere Schranke hat.
- B heißt **beschränkt**, wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Besitzt B eine größte untere Schranke i , d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i , so heißt i das **Infimum** von B (kurz $i = \inf B$):

$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- Besitzt B eine kleinste obere Schranke s , d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s , so heißt s das **Supremum** von B ($s = \sup B$):

$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Beispiel 42. Betrachte nebenstehende Ordnung. Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene Teilmengen $B \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ alle minimalen und maximalen Elemente, alle unteren und oberen Schranken sowie Minimum, Maximum, Infimum und Supremum von B (falls existent).



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken	inf	sup
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

<

Bemerkung 43.

- Es kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum geben.
- Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen. So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

weder ein Supremum noch ein Infimum.

- Dagegen hat in $(\mathbb{R}, \leq)$ jede beschränkte Teilmenge ein Supremum und ein Infimum (aber eventuell kein Maximum oder Minimum).

2.4.2 Abbildungen

Definition 44. Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M .

- R heißt **rechtseindeutig**, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- R heißt **linkseindeutig**, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- Der **Nachbereich** $N(R)$ und der **Vorbereich** $V(R)$ von R sind

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R[x] \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T[x].$$

- Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt **Abbildung** oder **Funktion von A nach B** (kurz $R : A \rightarrow B$).

Bemerkung 45.

- R ist also genau dann rechts- bzw. linkseindeutig, wenn jedes Element $x \in M$ höchstens einen Nachfolger bzw. Vorgänger hat.
- Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben $f, g, h, \dots$ bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der **Definitionsbereich** und die Menge B der **Wertebereich** oder **Wertevorrat** von f genannt.
- Der Nachbereich $N(f)$ wird als **Bild** von f bezeichnet.

Definition 46.

- Im Fall $N(f) = B$ heißt f **surjektiv**.
- Ist f linkseindeutig, so heißt f **injektiv**. In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.
- Eine injektive und surjektive Abbildung heißt **bijektiv**.
- Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : N(f) \rightarrow A$ eine Abbildung, die als die zu f inverse Abbildung bezeichnet wird.

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

2.4.3 Homo- und Isomorphismen

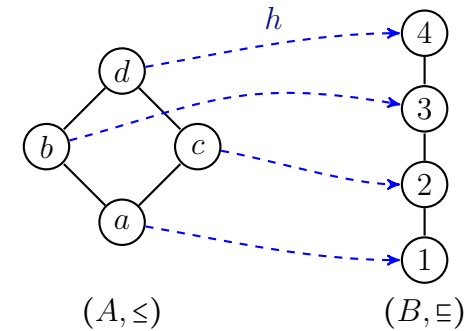
Definition 47. Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.

- Eine Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ heißt **Homomorphismus**, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

- Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man von **Ordnungshomomorphismen** oder einfach von **monotonen Abbildungen**.
- Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch **streng monoton** Abbildungen genannt.

Beispiel 48. Folgende Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.



Obwohl h ein bijektiver Homomorphismus ist, ist die Umkehrung h^{-1} kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist. Es gilt nämlich

$$2 \subseteq 3, \text{ aber } h^{-1}(2) = b \not\subseteq c = h^{-1}(3).$$

Dagegen ist für jede monotone Bijektion f zwischen **linearen** Ordnungen auch ihre Umkehrabbildung f^{-1} monoton. $\triangleleft$

Definition 49. Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \rightarrow A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

heißt **Isomorphismus**. In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) **isomorph** (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

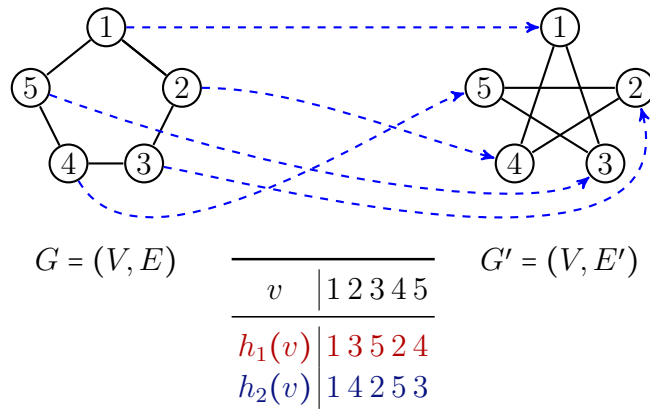
Beispiel 50.

- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ die Menge aller Teiler von n und $P_n = \{p \in T_n \mid p \text{ ist prim}\}$ die Menge aller Primteiler von n . Dann ist die Abbildung

$$h : k \mapsto P_k$$

ein (surjektiver) Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$. h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt).

- Die beiden folgenden Graphen G und G' sind isomorph. Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2 .

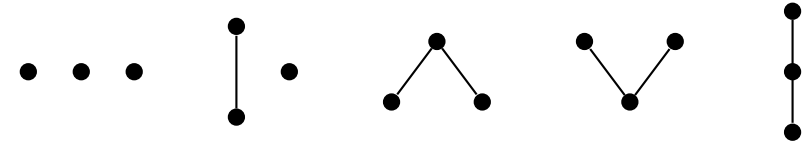


- Während auf der Knotenmenge $V = [3]$ insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:



- Die Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h(x) = e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}^+, \leq)$.

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

◀

2.5 Minimierung von DFAs

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ unnötige Zustände enthält? Zunächst einmal können alle Zustände entfernt werden, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind. Im folgenden gehen wir daher davon aus, dass M keine unerreichbaren Zustände enthält.

Offensichtlich können zwei Zustände q und p zu einem Zustand verschmolzen werden (kurz: $q \sim_M p$), wenn M von q und von p ausgehend jeweils dieselben Wörter akzeptiert. Bezeichnen wir den DFA $(Z, \Sigma, \delta, q, E)$ mit M_q , so sind q und p genau dann verschmelzbar, wenn $L(M_q) = L(M_p)$ ist. Offensichtlich ist $\sim_M$ eine Äquivalenzrelation.

Fassen wir alle mit einem Zustand z verschmelzbaren Zustände in dem neuen Zustand

$$[z]_{\sim_M} = \{z' \in Z \mid L(M_{z'}) = L(M_z)\}$$

zusammen (wofür wir auch kurz $[z]$ oder $\tilde{z}$ schreiben) und ersetzen wir Z und E durch $\tilde{Z} = \{\tilde{z} \mid z \in Z\}$ und $\tilde{E} = \{\tilde{z} \mid z \in E\}$, so erhalten wir den DFA $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}.$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{Q}$ für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ die Menge $\{\tilde{q} \mid q \in Q\}$ aller Äquivalenzklassen $\tilde{q}$, die mindestens ein Element $q \in Q$ enthalten. Der nächste Satz zeigt, dass M' tatsächlich der gesuchte Minimalautomat ist.

Satz 51. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, der nur Zustände enthält, die vom Startzustand q_0 aus erreichbar sind. Dann ist $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass δ' wohldefiniert ist, also der Wert von $\delta'(\tilde{q}, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten q abhängt. Hierzu zeigen wir, dass im Fall $p \sim_M q$ auch $\delta(q, a)$ und $\delta(p, a)$ äquivalent sind:

$$\begin{aligned} L(M_q) = L(M_p) &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L(M_q) \leftrightarrow x \in L(M_p) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : ax \in L(M_q) \leftrightarrow ax \in L(M_p) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L(M_{\delta(q,a)}) \leftrightarrow x \in L(M_{\delta(p,a)}) \\ &\Rightarrow L(M_{\delta(q,a)}) = L(M_{\delta(p,a)}). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass $L(M') = L(M)$ ist. Sei $x = x_1 \dots x_n$ eine Eingabe und seien

$$q_i = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

die von M bei Eingabe x durchlaufenen Zustände. Wegen

$$\delta'(\tilde{q}_{i-1}, x_i) = \widetilde{\delta(q_{i-1}, x_i)} = \tilde{q}_i$$

durchläuft M' dann die Zustände

$$\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n.$$

Da aber q_n genau dann zu E gehört, wenn $\tilde{q}_n \in \tilde{E}$ ist, folgt $L(M') = L(M)$ (man beachte, dass $\tilde{q}_n$ entweder nur Endzustände oder nur Nicht-Endzustände enthält, vgl. Beobachtung 53).

Es bleibt zu zeigen, dass M' eine minimale Anzahl $\|\tilde{Z}\|$ von Zuständen hat. Dies ist sicher dann der Fall, wenn bereits M minimal ist. Es reicht also zu zeigen, dass die Anzahl $k = \|\tilde{Z}\| = \|\{L(M_z) \mid z \in Z\}\|$ der Zustände von M' nicht von der Anzahl der Zustände von M , sondern nur von der erkannten Sprache $L = L(M)$ abhängt. Für $x \in \Sigma^*$ sei

$$L_x = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}$$

die **Restsprache** von L für das Wort x . Dann gilt $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} \subseteq \{L(M_z) \mid z \in Z\}$, da $L_x = L(M_{\delta(q_0, x)})$ ist. Die umgekehrte Inklusion gilt ebenfalls, da nach Voraussetzung jeder Zustand $q \in Z$ über ein $x \in \Sigma^*$ erreichbar ist. Also hängt $k = \|\{L(M_z) \mid z \in Z\}\| = \|\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}\|$ nur von L ab. ■

Beispiel 52. Die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0, 1\}^* \mid n \geq 2 \text{ und } x_{n-1} = 0\}$ hat die vier Restsprachen

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \text{ oder } x \text{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0, 1\}, & x = 0 \text{ oder } x \text{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon, 0, 1\}, & x \text{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \text{ endet mit } 01. \end{cases}$$

Entsprechend gibt es für L einen DFA mit 4 Zuständen, aber keinen mit 3 Zuständen.

Eine interessante Folgerung aus obigem Beweis ist, dass eine reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ nur endlich viele verschiedene Restsprachen L_x , $x \in \Sigma^*$, hat. Daraus folgt, dass die durch

$$x \sim_L y \Leftrightarrow L_x = L_y$$

auf Σ^* definierte Äquivalenzrelation $\sim_L$ für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ einen endlichen Index hat. Die Relation $\sim_L$ wird als *Nerode-Relation* von L bezeichnet.

Für die algorithmische Konstruktion von M' aus M ist es notwendig herauszufinden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht. Hierzu genügt es, die Menge $D = \left\{ \{p, q\} \subseteq Z \mid p \not\sim_M q \right\}$ zu berechnen.

Bezeichne $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz* von zwei Mengen A und B . Dann ist die Inäquivalenz $p \not\sim_M q$ zweier Zustände p und q gleichbedeutend mit $L(M_p) \triangle L(M_q) \neq \emptyset$. Wir nennen ein Wort $x \in L(M_p) \triangle L(M_q)$ einen *Unterscheider* zwischen p und q . Für $i \geq 0$ sei D^i die Menge aller Paare $\{p, q\}$, die einen Unterscheider x der Länge $|x| = i$ haben und D_i sei die Menge aller Paare $\{p, q\} \in D$, die einen Unterscheider x der Länge $|x| \leq i$ haben. Dann gilt $D_i = D^0 \cup D^1 \cup \dots \cup D^i$ und $D = \bigcup_{j \geq 0} D^j = \bigcup_{i \geq 0} D_i$.

Beobachtung 53.

- Das leere Wort ε unterscheidet Endzustände und Nichtendzustände, d.h.

$$D_0 = D^0 = \left\{ \{p, q\} \subseteq Z \mid p \in E, q \notin E \right\}.$$

- Zudem haben zwei Zustände p und q genau dann einen Unterscheider $x = x_1 \dots x_{i+1}$ der Länge $i+1$, wenn die beiden Zustände $\delta(p, x_1)$ und $\delta(q, x_1)$ einen Unterscheider $x = x_2 \dots x_{i+1}$ der Länge i haben. Daher gilt

$$\{p, q\} \in D^{i+1} \Leftrightarrow \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D^i,$$

was wiederum

$$D_{i+1} = \underbrace{D_i}_{D^0 \cup \dots \cup D^i} \cup \underbrace{\left\{ \{p, q\} \subseteq Z \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D_i \right\}}_{D^1 \cup \dots \cup D^{i+1}}$$

impliziert.

Da es nur endlich viele Zustandspaare gibt, gibt es ein $i \geq 0$ mit $D = D_i$. Offensichtlich gilt

$$D = D_i \Leftrightarrow D_{i+1} = D_i.$$

Der folgende Algorithmus berechnet für einen beliebigen DFA M den zugehörigen Minimal-DFA M' .

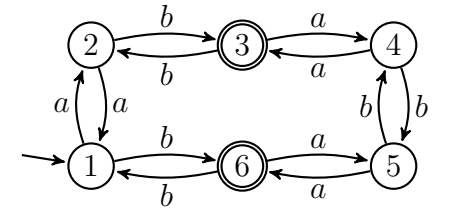
Algorithmus min-DFA(M)

```

1 Input: DFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ 
2 entferne alle unerreichbaren Zustände aus  $Z$ 
3  $D' := D_0 := \left\{ \{p, q\} \subseteq Z \mid p \in E, q \notin E \right\}$ 
4 repeat
5    $D := D'$ 
6    $D' := D_0 \cup \left\{ \{p, q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in D \right\}$ 
7 until  $D' = D$ 
8 Output:  $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ , wobei  $\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$  ist
9 und für jeden Zustand  $q \in Z$  gilt:  $\tilde{q} = \{p \in Z \mid \{p, q\} \notin D\}$ 

```

Beispiel 54. Betrachte den DFA M :



Dann enthält D_0 die Paare

$$\{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}.$$

Die Paare in D_0 sind in der folgenden Matrix durch den Unterscheider ε markiert.

2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Wegen

$\{p, q\}$		$\{1, 4\}$	$\{1, 5\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 5\}$
$\{\delta(q, a), \delta(p, a)\}$		$\{2, 3\}$	$\{2, 6\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 6\}$

enthält D_1 zusätzlich die Paare $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ (in obiger Matrix durch den Unterscheider a markiert). Da nun jedoch keines der verbliebenen Paare $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ wegen

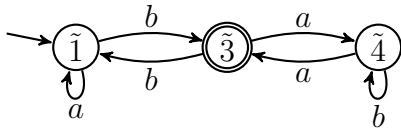
$\{p, q\}$		$\{1, 2\}$	$\{3, 6\}$	$\{4, 5\}$
$\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$		$\{1, 2\}$	$\{4, 5\}$	$\{3, 6\}$
$\{\delta(p, b), \delta(q, b)\}$		$\{3, 6\}$	$\{1, 2\}$	$\{4, 5\}$

zu D_2 hinzugefügt werden kann, gilt $D_2 = D_1$ und somit $D = D_1$.

Aus den unmarkierten Paaren $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$ und $\{4, 5\}$ erhalten wir die Äquivalenzklassen

$$\tilde{1} = \{1, 2\}, \quad \tilde{3} = \{3, 6\} \quad \text{und} \quad \tilde{4} = \{4, 5\},$$

die auf folgenden Minimal-DFA M' führen:



◁

Es ist auch möglich, einen Minimalautomaten M_L direkt aus einer regulären Sprache L zu gewinnen (also ohne einen DFA M für L zu kennen). Da wegen

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, y) &\Leftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \sim_M \widehat{\delta}(q_0, y) \\ &\Leftrightarrow L(M_{\widehat{\delta}(q_0, x)}) = L(M_{\widehat{\delta}(q_0, y)}) \Leftrightarrow L_x = L_y \end{aligned}$$

zwei Eingaben x und y den DFA M' genau dann in denselben Zustand überführen, wenn $L_x = L_y$ ist, können wir den von M' bei Eingabe x erreichten Zustand auch mit der Sprache L_x bezeichnen. Dies führt auf den zu M' isomorphen (also bis auf die Benennung der Zustände mit M' identischen) DFA $M_L = (Z_L, \Sigma, \delta_L, L_\varepsilon, E_L)$ mit

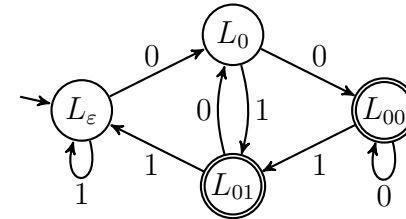
$$\begin{aligned} Z_L &= \{L_x \mid x \in \Sigma^*\}, \\ E_L &= \{L_x \mid x \in L\} \text{ und} \\ \delta_L(L_x, a) &= L_{xa}. \end{aligned}$$

M_L wird auch als **Restsprachen-DFA** für L bezeichnet.

Beispiel 55. Für die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0, 1\}^* \mid n \geq 2 \text{ und } x_{n-1} = 0\}$ mit den vier Restsprachen

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \text{ oder } x \text{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0, 1\}, & x = 0 \text{ oder } x \text{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon, 0, 1\}, & x \text{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \text{ endet mit } 01. \end{cases}$$

erhalten wir den folgenden Minimalautomaten M_L für L :



Man beachte, dass es für die Konstruktion von M_L keine Rolle spielt, wie die Restsprachen L_x konkret aussehen, d.h. ihre Angabe ist nicht erforderlich. ◁

Notwendig und hinreichend für die Existenz von M_L ist, dass die Nerode-Relation $\sim_L$ von L endlichen Index hat bzw. L nur endlich

viele verschiedene Restsprachen hat. Im Fall, dass M bereits ein Minimalautomat ist, sind alle Zustände von M' von der Form $\tilde{q} = \{q\}$, so dass M isomorph zu M' und damit auch isomorph zu M_L ist. Dies zeigt, dass alle Minimalautomaten für eine Sprache L isomorph sind.

Satz 56 (Myhill und Nerode).

1. Sei L regulär und sei $\text{index}(\sim_L)$ der Index von $\sim_L$. Dann gibt es für L bis auf Isomorphie genau einen Minimal-DFA. Dieser hat $\text{index}(\sim_L)$ Zustände.
2. $\text{REG} = \{L \mid \text{die Nerode-Relation } \sim_L \text{ hat endlichen Index}\}.$

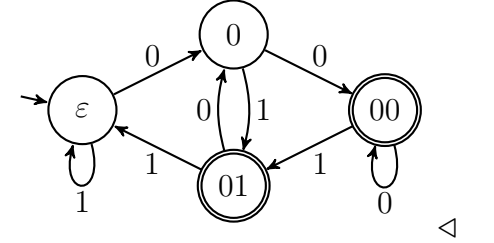
Sei R ein Repräsentantensystem für die Nerode-Relation $\sim_L$ von L , d.h. $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} = \{L_r \mid r \in R\}$ und $L_r \neq L_{r'}$ für alle $r, r' \in R$ mit $r \neq r'$. Dann können wir die Zustände des Minimal-DFA anstelle von L_x auch mit den Repräsentanten $r \in R$ bezeichnen. Dies führt auf den Minimal-DFA $M_R = (R, \Sigma, \delta, \varepsilon, E)$, wobei wir $\varepsilon \in R$ annehmen und $\delta(r, a) \in R$ der Repräsentant der Äquivalenzklasse $\tilde{ra}$ und $E = R \cap L$ ist. Wir bezeichnen M_R als den zu R gehörigen **Repräsentanten-DFA** für L .

Beispiel 57. Für die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0, 1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich ein Repräsentanten-DFA M_R wie folgt konstruieren:

1. Wir beginnen mit $r_1 = \varepsilon$.
2. Da $r_1 0 = 0 \not\sim_L \varepsilon$ ist, erhalten wir $r_2 = 0$ und setzen $\delta(\varepsilon, 0) = 0$.
3. Da $r_1 1 = 1 \sim_L \varepsilon$ ist, setzen wir $\delta(\varepsilon, 1) = \varepsilon$.
4. Da $r_2 0 = 00 \not\sim_L r_i$ für $i = 1, 2$ ist, erhalten wir $r_3 = 00$ und setzen $\delta(0, 0) = 00$.
5. Da $r_2 1 = 01 \not\sim_L r_i$ für $i = 1, 2, 3$ ist, erhalten wir $r_4 = 01$ und setzen $\delta(0, 1) = 01$.
6. Da zudem $r_3 0 = 000 \sim_L 00$, $r_3 1 = 001 \sim_L 01$, $r_4 0 = 010 \sim_L 0$ und $r_4 1 = 011 \sim_L \varepsilon$ gilt, setzen wir $\delta(00, 0) = 00$, $\delta(00, 1) = 01$, $\delta(01, 0) = 0$ und $\delta(01, 1) = \varepsilon$.

Wir erhalten also das Repräsentantensystem $R = \{\varepsilon, 0, 00, 01\}$ für $\sim_L$ und folgenden Minimal-DFA M_R für L :

r	ε	0	00	01
$\delta(r, 0)$	0	00	00	0
$\delta(r, 1)$	ε	01	01	ε



Wir fassen nochmals die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

Korollar 58. Für jede Sprache L sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär (d.h. es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$),
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,
- L hat endlich viele Restsprachen $L_x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$, $x \in \Sigma^*$,
- die Nerode-Relation $\sim_L$ von L hat endlichen Index.

Wir können also beweisen, dass eine Sprache L **nicht** regulär ist, indem wir unendlich viele verschiedene Restsprachen (bzw. unendlich viele paarweise bzgl. $\sim_L$ inäquivalente Wörter) finden.

Satz 59. Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Beweis. Wegen

$$b^i \in L_{a^i} \triangle L_{a^j} \quad (\text{für } 0 \leq i < j)$$

sind die Restsprachen L_{a^i} , $i \geq 0$, paarweise verschieden und wegen

$$a^i \sim_L a^j \Leftrightarrow L_{a^i} = L_{a^j}$$

folgt auch, dass $a^i \not\sim_L a^j$ für $i < j$ gilt, weshalb $\text{index}(\sim_L) = \infty$ ist. ■

Wir werden im nächsten Abschnitt noch eine weitere Methode kennenlernen, mit der man beweisen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist, nämlich das Pumping-Lemma.

2.6 Das Pumping-Lemma

Wie kann man von einer Sprache L noch nachweisen, dass sie nicht regulär ist? Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Kontraposition folgender Aussage anzuwenden.

Satz 60 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen).

Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl $l \geq 0$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ und
3. $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Falls eine Zahl $l \geq 0$ mit diesen Eigenschaften existiert, wird das kleinste solche l die **Pumpingzahl** von L genannt.

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein NFA für L und sei $l = \|Z\|$ die Anzahl der Zustände von M . Setzen wir M auf eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L$ der Länge $n \geq l$ an, so muss M nach spätestens l Schritten einen Zustand $q \in Z$ zum zweiten Mal besuchen:

$$\exists j, k : 0 \leq j < k \leq l \wedge \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_j) = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_k) = q.$$

Wählen wir nun $u = x_1 \dots x_j$, $v = x_{j+1} \dots x_k$ und $w = x_{k+1} \dots x_n$, so ist $|v| = k - j \geq 1$ und $|uv| = k \leq l$. Ausserdem gilt $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$, da M wegen $\hat{\delta}(q, v^i) = \hat{\delta}(q, v) = q$ nach Lesen von $uv^i w$ einen Endzustand erreicht:

$$\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, u), v^i)}_q, w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, u), v)}_q, w) = \hat{\delta}(q_0, x) \in E$$

■

Beispiel 61. Die Sprache

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

hat die Pumpingzahl $l = 3$. Sei nämlich $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq 3$. Dann lässt sich innerhalb des Präfixes von x der Länge drei ein nichtleeres Teilwort v finden, das gepumpt werden kann:

1. Fall: x hat das Präfix ab (oder ba).

Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

2. Fall: x hat das Präfix aab (oder bba).

Zerlege $x = uvw$ mit $u = a$ (bzw. $u = b$) und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

3. Fall: x hat das Präfix aaa (oder bbb).

Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aaa$ (bzw. $v = bbb$). $\triangleleft$

Beispiel 62. Eine endliche Sprache L hat die Pumpingzahl $l = l_{\max} + 1$, wobei

$$l_{\max} = \begin{cases} -1, & L = \emptyset, \\ \max\{|x| \mid x \in L\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Tatsächlich lässt sich jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| > l_{\max}$ „pumpen“ (da solche Wörter gar nicht existieren), weshalb die Pumpingzahl höchstens $l_{\max} + 1$ ist. Zudem gibt es im Fall $l_{\max} \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| = l_{\max} = l - 1$, das sich nicht „pumpen“ lässt, weshalb die Pumpingzahl nicht kleiner als l sein kann. $\triangleleft$

Sei $\min_{DFA}(L)$ ($\min_{NFA}(L)$) die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA (bzw. NFA) einer regulären Sprache L und sei $l_{\text{reg}}(L)$ die Pumping-Zahl für L . Da wir im Beweis des Pumping-Lemmas einen NFA für L mit $l = \min_{NFA}(L)$ Zuständen wählen können, folgt

$$l_{\text{reg}}(L) \leq \min_{NFA}(L) \leq \min_{DFA}(L) = \text{index}(\sim_L).$$

Tatsächlich gibt es für jedes $i \geq 1$ eine Sprache L mit

$$l_{\text{reg}}(L) = \text{index}(\sim_L) = i.$$

Andererseits gibt es für jedes $i \geq 1$ auch eine Sprache L mit

$$l_{\text{reg}}(L) = 1 \text{ und } \text{index}(\sim_L) = i.$$

Dagegen ist $L = \emptyset$ die einzige Sprache mit der Pumping-Zahl 0. Für diese gilt $\text{index}(\sim_\emptyset) = 1$.

Wollen wir mit Hilfe des Pumping-Lemmas von einer Sprache L zeigen, dass sie nicht regulär ist, so genügt es, für jede Zahl l ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ anzugeben, so dass für jede Zerlegung von x in drei Teilwörter u, v, w mindestens eine der drei in Satz 60 aufgeführten Eigenschaften verletzt ist.

Beispiel 63. Die Sprache

$$L = \{a^j b^j \mid j \geq 0\}$$

ist nicht regulär, da sich für jede Zahl $l \geq 0$ das Wort $x = a^l b^l$ der Länge $|x| = 2l \geq l$ in der Sprache L befindet, welches offensichtlich nicht in Teilwörter u, v, w mit $v \neq \varepsilon$ und $uv^2w \in L$ zerlegbar ist. $\triangleleft$

Beispiel 64. Die Sprache

$$L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

ist ebenfalls nicht regulär. Andernfalls müsste es nämlich eine Zahl $l \geq 0$ geben, so dass jede Quadratzahl $n^2 \geq l$ als Summe von natürlichen Zahlen $u + v + w$ darstellbar ist mit der Eigenschaft, dass $v \geq 1$ und $u + v \leq l$ ist, und für jedes $i \geq 0$ auch $u + iv + w$ eine Quadratzahl ist. Für $n = l$ müsste also insbesondere $u + 2v + w = n^2 + v$ eine Quadratzahl sein, was wegen

$$n^2 < n^2 + v \leq n^2 + l < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

ausgeschlossen ist. $\triangleleft$

Beispiel 65. Auch die Sprache

$$L = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$$

ist nicht regulär, da sich sonst jede Primzahl p einer bestimmten Mindestgröße l als Summe von natürlichen Zahlen $u + v + w$ darstellen

ließe, so dass $v \geq 1$ und für alle $i \geq 0$ auch $u + iv + w = p + (i - 1)v$ prim ist. Dies ist jedoch für $i = p + 1$ wegen

$$p + (p + 1 - 1)v = p(1 + v)$$

nicht der Fall. $\triangleleft$

Bemerkung 66. Mit Hilfe des Pumping-Lemmas kann nicht für jede Sprache $L \notin \text{REG}$ gezeigt werden, dass L nicht regulär ist, da seine Umkehrung falsch ist. So hat beispielsweise die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}$$

die Pumpingzahl 1 (d.h. jedes Wort $x \in L$ mit Ausnahme von ε kann „gepumpt“ werden). Dennoch ist L nicht regulär (siehe Übungen).

2.7 Grammatiken

Eine beliebte Methode, Sprachen zu beschreiben, sind Grammatiken. Implizit haben wir diese Methode bei der Definition der regulären Ausdrücke bereits benutzt.

Beispiel 67. Die Sprache RA aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ lässt sich aus dem Symbol R durch wiederholte Anwendung folgender Ersetzungsregeln erzeugen:

$$\begin{array}{ll} R \rightarrow \emptyset, & R \rightarrow RR, \\ R \rightarrow \epsilon, & R \rightarrow (R|R), \\ R \rightarrow a_i, i = 1, \dots, k, & R \rightarrow (R)^*. \end{array}$$

Definition 68. Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V eine endliche Menge von **Variablen** (auch **Nichtterminalsymbole** genannt),
- Σ das **Terminalalphabet**,

- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von **Regeln** (oder **Produktionen**) und
- $S \in V$ die **Startvariable** ist.

Die Produktionenmenge P ist also eine binäre Relation auf $(V \cup \Sigma)^*$. Für $(u, v) \in P$ schreiben wir auch kurz $u \rightarrow_G v$ bzw. $u \rightarrow v$, wenn die benutzte Grammatik aus dem Kontext ersichtlich ist. Regeln der Form $\varepsilon \rightarrow v$ sind nicht erlaubt.

Definition 69. Seien $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

- a) Wir sagen, β ist aus α in einem Schritt ableitbar (kurz: $\alpha \Rightarrow_G \beta$), falls eine Regel $u \rightarrow_G v$ und Wörter $l, r \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit

$$\alpha = lur \text{ und } \beta = lvr.$$

Hierfür schreiben wir auch $\underline{lur} \Rightarrow_G \underline{lvr}$ bzw. $\underline{lur} \Rightarrow \underline{lvr}$.[†]

- b) Die durch G erzeugte Sprache ist

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* x\}.$$

- c) Ein Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow^* \alpha$ heißt **Satzform** von G .

Beispiel 70. Wir betrachten nochmals die Grammatik $G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), *, |\}, P, R)$, die die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ erzeugt, wobei P die oben angegebenen Regeln enthält. Ist $\Sigma = \{0, 1\}$, so lässt sich der reguläre Ausdruck $(01)^*(\epsilon|\emptyset)$ beispielsweise wie folgt in 8 Schritten ableiten:

$$\begin{aligned} R &\Rightarrow \underline{R}R \Rightarrow (\underline{R})^*R \Rightarrow (RR)^*R \Rightarrow (RR)^*(R|R) \\ &\Rightarrow (0\underline{R})^*(R|R) \Rightarrow (01)^*(\underline{R}|R) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\underline{R}) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\emptyset) \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Man unterscheidet vier verschiedene Typen von Grammatiken.

Definition 71. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

1. G heißt vom **Typ 3** oder **regulär**, falls für alle Regeln $u \rightarrow v$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\epsilon\}$.
2. G heißt vom **Typ 2** oder **kontextfrei**, falls für alle Regeln $u \rightarrow v$ gilt: $u \in V$.
3. G heißt vom **Typ 1** oder **kontextsensitiv**, falls für alle Regeln $u \rightarrow v$ gilt: $|v| \geq |u|$ (mit Ausnahme der ε -Sonderregel, siehe unten).
4. Jede Grammatik ist automatisch vom **Typ 0**.

ε -Sonderregel: In einer kontextsensitiven Grammatik (V, Σ, P, S) kann auch die verkürzende Regel $S \rightarrow \varepsilon$ vorkommen. Aber nur, wenn das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel steht.

Die Sprechweisen „vom Typ i “ bzw. „regulär“, „kontextfrei“ und „kontextsensitiv“ werden auch auf die durch solche Grammatiken erzeugten Sprachen angewandt. (Der folgende Satz rechtfertigt dies für die regulären Sprachen, die wir bereits mit Hilfe von DFAs definiert haben.) Die zugehörigen neuen Sprachklassen sind

$$\text{CFL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextfreie Grammatik}\},$$

(context free languages) und

$$\text{CSL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextsensitive Grammatik}\}$$

(context sensitive languages). Da die Klasse der Typ 0 Sprachen mit der Klasse der rekursiv aufzählbaren (recursively enumerable) Sprachen übereinstimmt, bezeichnen wir diese Sprachklasse mit

$$\text{RE} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\}.$$

Die Sprachklassen

$$\text{REG} \subset \text{CFL} \subset \text{CSL} \subset \text{RE}$$

[†]Man beachte, dass durch Unterstreichen von u in α sowohl die benutzte Regel als auch die Stelle in α , an der u durch v ersetzt wird, eindeutig erkennbar sind. Da $\Rightarrow$ eine binäre Relation auf $(V \cup \Sigma)^*$ ist, bezeichnet $\Rightarrow^m$ das m -fache Relationenprodukt und $\Rightarrow^*$ die reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow$.

bilden eine Hierarchie (d.h. alle Inklusionen sind echt), die so genannte **Chomsky-Hierarchie**.

Als nächstes zeigen wir, dass sich mit regulären Grammatiken gerade die regulären Sprachen erzeugen lassen.

Satz 72. $\text{REG} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine reguläre Grammatik}\}.$

Beweis. Sei $L \in \text{REG}$ und sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$. Wir konstruieren eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L$. Setzen wir

$$\begin{aligned} V &= Z, \\ S &= q_0 \text{ und} \\ P &= \{q \rightarrow ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \rightarrow \varepsilon \mid q \in E\}, \end{aligned}$$

so gilt für alle Wörter $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$:

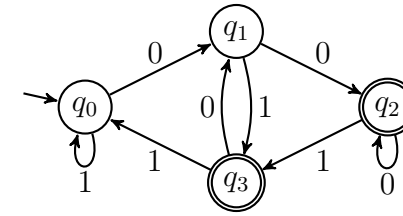
$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_{n-1} \in Z \exists q_n \in E : \\ &\quad \delta(q_{i-1}, x_i) = q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n \in V : \\ &\quad q_{i-1} \rightarrow_G x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \rightarrow_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n \in V : \\ &\quad q_0 \Rightarrow_G^i x_1 \dots x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \rightarrow_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in L(G) \end{aligned}$$

Für die entgegengesetzte Inklusion sei nun $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik, die keine Produktionen der Form $A \rightarrow a$ enthält. Dann können wir die gerade beschriebene Konstruktion einer Grammatik aus einem DFA „umdrehen“, um ausgehend von G einen NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &= V, \\ E &= \{A \mid A \rightarrow_G \varepsilon\} \text{ und} \\ \delta(A, a) &= \{B \mid A \rightarrow_G aB\} \end{aligned}$$

zu erhalten. Genau wie oben folgt nun $L(M) = L(G)$. ■

Beispiel 73. Der DFA



führt auf die Grammatik $(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ mit

$$\begin{aligned} P : \quad & q_0 \rightarrow 1q_0, 0q_1, \\ & q_1 \rightarrow 0q_2, 1q_3, \\ & q_2 \rightarrow 0q_2, 1q_3, \varepsilon, \\ & q_3 \rightarrow 0q_1, 1q_0, \varepsilon. \end{aligned}$$

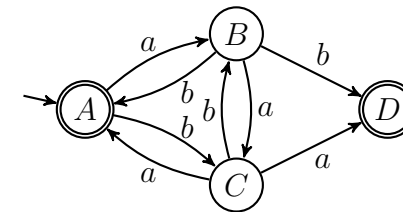
Umgekehrt führt die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$\begin{aligned} P : \quad & A \rightarrow aB, bC, \varepsilon, \\ & B \rightarrow aC, bA, b, \\ & C \rightarrow aA, bB, a \end{aligned}$$

über die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ mit

$$\begin{aligned} P' : \quad & A \rightarrow aB, bC, \varepsilon, \\ & B \rightarrow aC, bA, bD, \\ & C \rightarrow aA, bB, aD, \\ & D \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

auf den NFA



3 Kontextfreie Sprachen

Wie wir gesehen haben, ist die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär. Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}, S).$$

Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL} \subsetneq \text{CSL}.$$

Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \rightarrow \alpha$ haben. Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε -Regeln der Form $A \rightarrow \varepsilon$ zu. Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε -Regel $S \rightarrow \varepsilon$ haben. Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt. Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv. Beispielsweise ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}, S)$ nicht kontextsensitiv, da sie die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ enthält, obwohl S auf der rechten Seite der Regel $S \rightarrow aSb$ vorkommt.

Es lässt sich jedoch zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' konstruieren, die auch kontextsensitiv ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik G , in der nicht das leere Wort ableitbar ist, eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' ohne ε -Regeln konstruieren lässt.

Satz 74. *Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε -Produktionen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.*

Beweis. Zuerst sammeln wir mit folgendem Algorithmus alle Variablen A , aus denen das leere Wort ableitbar ist. Diese werden auch als ε -ableitbar bezeichnet.

```

1  $E' := \{A \in V \mid A \rightarrow \varepsilon\}$ 
2 repeat
3    $E := E'$ 
4    $E' := E \cup \{A \in V \mid \exists B_1, \dots, B_k \in E : A \rightarrow B_1 \dots B_k\}$ 
5 until  $E = E'$ 

```

Nun konstruieren wir $G' = (V, \Sigma, P', S)$ wie folgt:

Nehme zu P' alle Regeln $A \rightarrow \alpha'$ mit $\alpha' \neq \varepsilon$ hinzu, für die P eine Regel $A \rightarrow \alpha$ enthält, so dass α' aus α durch Entfernen von beliebig vielen Variablen $A \in E$ hervorgeht.

■

Beispiel 75. *Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln*

$$P: \quad S \rightarrow aY, bX, Z; \quad Y \rightarrow bS, aYY; \quad T \rightarrow U; \\ X \rightarrow aS, bXX; \quad Z \rightarrow \varepsilon, S, T, cZ; \quad U \rightarrow abc.$$

Bei der Berechnung von $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^ \varepsilon\}$ ergeben sich der Reihe nach folgende Belegungen für die Mengenvariablen E und E' :*

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

Um nun die Regelmengende P' zu bilden, entfernen wir aus P die einzige ε -Regel $Z \rightarrow \varepsilon$ und fügen die Regeln $X \rightarrow a$ (wegen $X \rightarrow aS$), $Y \rightarrow b$ (wegen $Y \rightarrow bS$) und $Z \rightarrow c$ (wegen $Z \rightarrow cZ$) hinzu:

$$P': \quad S \rightarrow aY, bX, Z; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow U; \\ X \rightarrow a, aS, bXX; \quad Z \rightarrow c, S, T, cZ; \quad U \rightarrow abc.$$

◁

Als direkte Anwendung des obigen Satzes können wir die Inklusion der Klasse der Typ 2 Sprachen in der Klasse der Typ 1 Sprachen zeigen.

Korollar 76. $\text{REG} \subsetneq \text{CFL} \subseteq \text{CSL} \subseteq \text{RE}$.

Beweis. Die Inklusionen $\text{REG} \subseteq \text{CFL}$ und $\text{CSL} \subseteq \text{RE}$ sind klar. Wegen $\{a^n b^n | n \geq 0\} \in \text{CFL} - \text{REG}$ ist die Inklusion $\text{REG} \subseteq \text{CFL}$ auch echt. Also ist nur noch die Inklusion $\text{CFL} \subseteq \text{CSL}$ zu zeigen. Nach obigem Satz ex. zu $L \in \text{CFL}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε -Produktionen mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in \text{CSL}$. Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

$$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow S, \varepsilon\}, S')$$

die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in \text{CSL}$. ■

Als nächstes zeigen wir folgende Abschlusseigenschaften der kontextfreien Sprachen.

Satz 77. *Die Klasse CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.*

Beweis. Seien $G_i = (V_i, \Sigma, P_i, S_i)$, $i = 1, 2$, kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L(G_i) = L_i$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und sei S eine neue Variable. Dann erzeugt die kontextfreie Grammatik

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L_1 \cup L_2$. Die Grammatik

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$$

erzeugt das Produkt $L(G_4) = L_1 L_2$ und die Sternhülle $(L_1)^*$ wird von der Grammatik

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \rightarrow S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

erzeugt. ■

Man beachte, dass sich G_5 nicht durch die Grammatik $G_6 = (V_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \rightarrow S_1 S_1, \varepsilon\}, S_1)$ ersetzen lässt, da $L(G_6)$ im Fall $P_1 = \{S_1 \rightarrow a S_1 b, \varepsilon\}$ z.B. das Wort $aababb \notin L(G_1)^*$ enthält.

Offen bleibt zunächst, ob die kontextfreien Sprachen auch unter Schnitt und Komplement abgeschlossen sind. Um dies zu verneinen, müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen).

Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l , so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Für den Beweis benötigen wir Grammatiken in Chomsky-Normalform, die wir im nächsten Abschnitt behandeln werden.

Beispiel 78. *Betrachte die Sprache $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$. Dann lässt sich jedes Wort $z = a^n b^n$ mit $|z| \geq 2$ pumpen: Zerlege $z = uvwxy$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \varepsilon$, $x = b$ und $y = b^{n-1}$. ◁*

Beispiel 79. *Die Sprache $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei. Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich $z = a^l b^l c^l$ die Länge $|z| = 3l \geq l$. Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen, da für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ das Wort $z' = uv^2wx^2y$ nicht zu L gehört:*

- Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z| < |z'|$.
- Wegen $|vwx| \leq l$ kann in vx nicht jedes der drei Zeichen a, b, c vorkommen.

- Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist

$$\#_a(z') = \#_a(z) = l = |z|/3 < |z'|/3,$$

also kann z' nicht zu L gehören. $\triangleleft$

Die Chomsky-Normalform ist auch Grundlage für einen effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken, das wie folgt definiert ist.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x .

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Satz. Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

3.1 Chomsky-Normalform

Definition 80. Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in **Chomsky-Normalform (CNF)**, falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \rightarrow BC$ oder $A \rightarrow a$ haben.

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε -Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \rightarrow B$ loswerden.

Definition 81. Regeln der Form $A \rightarrow B$ heißen **Variablenumbenennungen**.

Satz 82. Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis. Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1,$$

indem wir diese Regeln aus P entfernen und alle übrigen Vorkommen der Variablen $A_2, \dots, A_k$ durch A_1 ersetzen. Falls sich unter den entfernten Variablen $A_2, \dots, A_k$ die Startvariable S befindet, sei A_1 die neue Startvariable.

Nun entfernen wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen, indem wir

- eine Regel $A \rightarrow B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \rightarrow C$ mit B auf der rechten Seite existiert,
- diese Regel $A \rightarrow B$ aus P entfernen und
- für jede Regel $B \rightarrow \alpha$ in P die Regel $A \rightarrow \alpha$ zu P hinzunehmen. ■

Beispiel 83. Ausgehend von den Produktionen

$$\begin{aligned} P: S &\rightarrow aY, bX, Z; & Y &\rightarrow b, bS, aYY; & T &\rightarrow U; \\ X &\rightarrow a, aS, bXX; & Z &\rightarrow c, S, T, cZ; & U &\rightarrow abc \end{aligned}$$

entfernen wir den Zyklus $S \rightarrow Z \rightarrow S$, indem wir die Regeln $S \rightarrow Z$ und $Z \rightarrow S$ entfernen und dafür die Produktionen $S \rightarrow c, T, cS$ (wegen $Z \rightarrow c, T, cZ$) hinzunehmen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aY, bX, c, T, cS; & Y &\rightarrow b, bS, aYY; & T &\rightarrow U; \\ X &\rightarrow a, aS, bXX; & U &\rightarrow abc. \end{aligned}$$

Nun entfernen wir die Regel $T \rightarrow U$ und fügen die Regel $T \rightarrow abc$ (wegen $U \rightarrow abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aY, bX, c, T, cS; & Y &\rightarrow b, bS, aYY; & T &\rightarrow abc; \\ X &\rightarrow a, aS, bXX; & U &\rightarrow abc. \end{aligned}$$

Als nächstes entfernen wir dann auch die Regel $S \rightarrow T$ und fügen die Regel $S \rightarrow abc$ (wegen $T \rightarrow abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow abc, aY, bX, c, cS; & Y &\rightarrow b, bS, aYY; & T &\rightarrow abc; \\ X &\rightarrow a, aS, bXX; & U &\rightarrow abc. \end{aligned}$$

Da T und U nun nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \rightarrow abc$ und $U \rightarrow abc$ weglassen:

$$S \rightarrow abc, aY, bX, c, cS; Y \rightarrow b, bS, aYY; X \rightarrow a, aS, bXX. \quad \triangleleft$$

Nach diesen Vorarbeiten ist es nun leicht, eine gegebene kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform umzuwandeln.

Satz 84. Jede kontextfreie Grammatik G lässt sich in eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ transformieren.

Beweis. Aufgrund der beiden vorigen Sätze können wir G in eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ transformieren, die keine ε -Produktionen und keine Variablenumbenennungen hat. Diese können wir wie folgt in eine äquivalente CNF-Grammatik umwandeln:

- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \rightarrow a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a , außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Führe für jede Regel $A \rightarrow B_1 \dots B_k$, $k \geq 3$, neue Variablen $A_1, \dots, A_{k-2}$ ein und ersetze sie durch die $k-1$ Regeln

$$A \rightarrow B_1 A_1, A_1 \rightarrow B_2 A_2, \dots, A_{k-3} \rightarrow B_{k-2} A_{k-2}, A_{k-2} \rightarrow B_{k-1} B_k \quad \blacksquare$$

Falls G Regeln mit vielen ε -ableitbaren Variablen auf der rechten Seite hat, empfiehlt es sich, die in obigem Beweis beschriebenen Umformungsschritte zuerst durchzuführen, und erst danach Regeln der Form $A \rightarrow \varepsilon$ und $A \rightarrow B$ zu beseitigen (siehe Übungen).

Beispiel 85. In der Produktionsmenge

$$P: S \rightarrow abc, aY, bX, c, cS; X \rightarrow a, aS, bXX; Y \rightarrow b, bS, aYY$$

ersetzen wir die Terminalsymbole a , b und c durch die Variablen A , B und C (außer wenn sie alleine auf der rechten Seite einer Regel vorkommen) und fügen die Regeln $A \rightarrow a$, $B \rightarrow b$, $C \rightarrow c$ hinzu:

$$S \rightarrow c, ABC, AY, BX, CS; X \rightarrow a, AS, BXX; Y \rightarrow b, BS, AYY; A \rightarrow a; B \rightarrow b; C \rightarrow c.$$

Ersetze nun die Regeln $S \rightarrow ABC$, $X \rightarrow BXX$ und $Y \rightarrow AYY$ durch die Regeln $S \rightarrow AS'$, $S' \rightarrow BC$, $X \rightarrow BX'$, $X' \rightarrow XX$ und $Y \rightarrow AY'$, $Y' \rightarrow YY$:

$$S \rightarrow c, AS', AY, BX, CS; S' \rightarrow BC; X \rightarrow a, AS, BX'; X' \rightarrow XX; Y \rightarrow b, BS, AY'; Y' \rightarrow YY; A \rightarrow a; B \rightarrow b; C \rightarrow c. \quad \triangleleft$$

Eine interessante Frage ist, ob in einer kontextfreien Grammatik G jedes Wort $x \in L(G)$ "eindeutig" ableitbar ist. Es ist klar, dass in diesem Kontext Ableitungen, die sich nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden sollten. Dies erreichen wir dadurch, dass wir die Reihenfolge der Regelanwendungen festlegen.

Definition 86. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Ableitung $A_0 \Rightarrow l_1 A_1 r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow l_{m-1} A_{m-1} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$ heißt **Linksableitung** von α (kurz $\alpha_0 \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 0, \dots, m-1$.
- Rechtsableitungen** $A_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.
- G heißt **mehrdeutig**, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das mindestens zwei verschiedene Linksableitungen $S \Rightarrow_L^* x$ hat. Andernfalls heißt G **eindeutig**.

Offenbar gelten für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenzen:

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_R^* x.$$

Beispiel 87. Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$. Offenbar hat das Wort $aabb$ in G acht verschiedene Ableitungen, die sich allerdings nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden:

$$\begin{aligned} \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}b\underline{S} \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}b\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb \\ \underline{S} &\Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb. \end{aligned}$$

Darunter sind genau eine Links- und genau eine Rechtsableitung:

$$\underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L aa\underline{S}bSbS \Rightarrow_L aab\underline{S}bS \Rightarrow_L aabb\underline{S} \Rightarrow_L aabb$$

und

$$\underline{S} \Rightarrow_R aSb\underline{S} \Rightarrow_R a\underline{S}b \Rightarrow_R aaSb\underline{S}b \Rightarrow_R aa\underline{S}bb \Rightarrow_R aabb.$$

Die Grammatik G ist eindeutig. Dies liegt daran, dass in jeder Satzform $\alpha S \beta$ von G das Suffix β entweder leer ist oder mit einem b beginnt. Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $z \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $xS\beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, wenn in z auf das Präfix x ein a folgt.

Dagegen ist die Grammatik $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ zwei Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow_L ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L ab\underline{S} \Rightarrow_L ab. \quad \triangleleft$$

Ableitungen in einer kontextfreien Grammatik lassen sich graphisch sehr gut durch einen Syntaxbaum (auch **Ableitungsbaum** genannt, engl. *parse tree*) veranschaulichen.

Definition 88. Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.

- Ein **v_0 - v_k -Weg** in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \dots, v_k$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, k-1$. Seine **Länge** ist k .
- Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle seine Knoten paarweise verschieden sind.
- Ein u - v -Weg der Länge ≥ 1 mit $u = v$ heißt **Zyklus**.
- G heißt **azyklisch**, wenn es in G keinen Zyklus gibt.
- G heißt **gerichteter Wald**, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.
- Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt **Blatt**.
- Ein Knoten $w \in V$ heißt **Wurzel** von G , falls alle Knoten $v \in V$ von w aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen w - v -Weg in G).
- Ein **gerichteter Wald**, der eine Wurzel hat, heißt **gerichteter Baum**.
- Da die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel eindeutig bestimmt sind, kann auf ihre Angabe verzichtet werden. Man spricht dann auch von einem **Wurzelbaum**.

Definition 89. Sei $\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$ eine Ableitung in einer kontextfreien Grammatik G . Wir ordnen ihr den Syntaxbaum T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \dots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:

- T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.
- Wird im $(i+1)$ -ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \rightarrow v_1 \dots v_k$ mit $v_j \in \Sigma \cup V$ für $j = 1, \dots, k$ angewandt, so entsteht T_{i+1} aus T_i , indem wir das Blatt A_i in T_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:

$$\begin{array}{ccc} k > 0: & A_i & k = 0: A_i \\ & \swarrow \quad \searrow & \downarrow \\ & v_1 \quad \dots \quad v_k & \varepsilon \end{array}$$

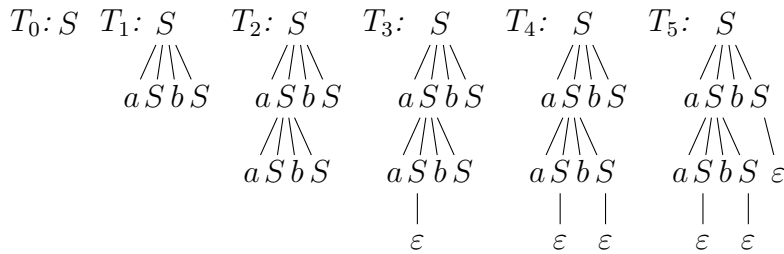
- Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet

und die Kinder $v_1 \dots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.

Beispiel 90. Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb.$$

Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i , indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen. $\triangleleft$

Bemerkung 91.

- Aus einem Syntaxbaum ist die zugehörige Linksableitung eindeutig rekonstruierbar. Daher führen unterschiedliche Linksableitungen auch auf unterschiedliche Syntaxbäume. Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig. Ebenso Rechtsableitungen und Syntaxbäume.
- Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein Binärbaum).

3.2 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

In diesem Abschnitt beweisen wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Dabei nutzen wir die Tatsache aus, dass die Syntaxbäume einer CNF-Grammatik Binäräume sind.

Definition 92. Die **Tiefe** eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Pfadlänge von w zu einem Blatt.

Lemma 93. Ein Binärbaum B der Tiefe k hat höchstens 2^k Blätter.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über k .

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k + 1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $k + 1$. Dann hängen an B 's Wurzel maximal zwei Teilbäume. Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV höchstens 2^k Blätter. Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. ■

Korollar 94. Ein Binärbaum B mit mehr als 2^{k-1} Blättern hat mindestens Tiefe k .

Beweis. Würde B mehr als 2^{k-1} Blätter und eine Tiefe $\leq k - 1$ besitzen, so würde dies im Widerspruch zu Lemma 93 stehen. ■

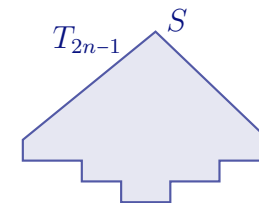
Satz 95 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen).

Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l , so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

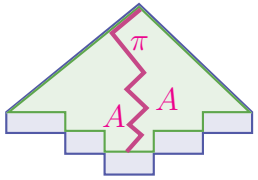
Beweis. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$. Dann gibt es in G für jedes Wort $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, eine Ableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \dots \Rightarrow \alpha_m = z.$$



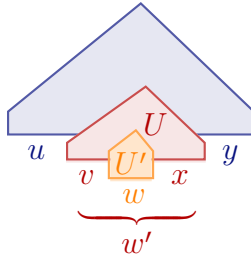
Da G in CNF ist, werden hierbei $n - 1$ Regeln der Form $A \rightarrow BC$ und n Regeln der Form $A \rightarrow a$ angewandt, d.h. $m = 2n - 1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1} . Wir können annehmen,

dass zuerst alle Regeln der Form $A \rightarrow BC$ und danach die Regeln der Form $A \rightarrow a$ zur Anwendung kommen. Dann besteht die Satzform α_{n-1} aus n Variablen und der Syntaxbaum T_{n-1} hat ebenfalls n Blätter. Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens

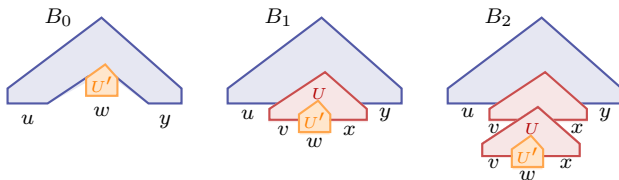


$l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k . Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1} . Dann hat π die Länge $\geq k$ und unter den letzten $k+1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.

Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1} . Nun zerlegen wir z wie folgt. w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird. Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Zerlegung die geforderten 3 Eigenschaften erfüllt.



- Da U mehr Blätter hat als U' , ist $vx \neq \varepsilon$ (Bedingung 1).
- Da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ die Tiefe $\leq k$ hat (andernfalls wäre π nicht maximal), hat U^* höchstens $2^k = l$ Blätter. Da U^* genau $|vwx|$ Blätter hat, folgt $|vwx| \leq l$ (Bedingung 2).
- Für den Nachweis von Bedingung 3 lassen sich schließlich Syntaxbäume B^i für die Wörter uv^iwx^iy , $i \geq 0$, wie folgt konstruieren:



B^0 entsteht also aus $B^1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen, und B^{i+1} entsteht aus B^i , indem wir U' durch U ersetzen. ■

Satz 96. Die Klasse CFL ist nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplement.

Beweis. Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind kontextfrei. Nicht jedoch $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Also ist CFL nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Da CFL zwar unter Vereinigung aber nicht unter Schnitt abgeschlossen ist, kann CFL wegen de Morgan nicht unter Komplementbildung abgeschlossen sein. ■

3.3 Der CYK-Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir den bereits angekündigten effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken vor.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x .

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Wir lösen das Wortproblem, indem wir G zunächst in Chomsky-Normalform bringen und dann den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus anwenden, welcher auf dem Prinzip der Dynamischen Programmierung beruht.

Satz 97. Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

Beweis. Seien eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$

gilt. Andernfalls transformieren wir G in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Chomsky-Normalform. Es lässt sich leicht verifizieren, dass die nötigen Umformungsschritte effizient ausführbar sind. Nun setzen wir den CYK-Algorithmus auf das Paar (G', x) an, der die Zugehörigkeit von x zu $L(G')$ wie folgt entscheidet.

Bestimme für $l = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, n - l + 1$ die Menge

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \dots x_{k+l-1}\}$$

aller Variablen, aus denen das an Position k beginnende Teilwort $x_k \dots x_{k+l-1}$ von x der Länge l ableitbar ist. Dann gilt offensichtlich

$$x \in L(G') \Leftrightarrow S \in V_{n,1}(x).$$

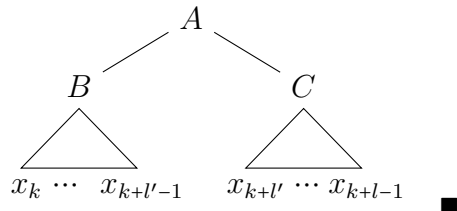
Für $l = 1$ ist

$$V_{1,k}(x) = \{A \in V \mid A \rightarrow x_k\}$$

und für $l = 2, \dots, n$ ist

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid \exists l' < l \exists B \in V_{l',k}(x) \exists C \in V_{l-l',k+l'}(x) : A \rightarrow BC\}.$$

Eine Variable A gehört also genau dann zu $V_{l,k}(x)$, $l \geq 2$, falls eine Zahl $l' \in \{1, \dots, l-1\}$ und eine Regel $A \rightarrow BC$ existieren, so dass $B \in V_{l',k}(x)$ und $C \in V_{l-l',k+l'}(x)$ sind.



Algorithmus CYK(G, x)

```

1 Input: CNF-Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  und ein Wort  $x = x_1 \dots x_n$ 
2 for  $k := 1$  to  $n$  do
3    $V_{1,k} := \{A \in V \mid A \rightarrow x_k \in P\}$ 
4 for  $l := 2$  to  $n$  do
5   for  $k := 1$  to  $n - l + 1$  do
6      $V_{l,k} := \emptyset$ 

```

```

7   for  $l' := 1$  to  $l - 1$  do
8     for all  $A \rightarrow BC \in P$  do
9       if  $B \in V_{l',k}$  and  $C \in V_{l-l',k+l'}$  then
10         $V_{l,k} := V_{l,k} \cup \{A\}$ 
11 if  $S \in V_{n,1}$  then accept else reject

```

Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x ausgibt. Hierzu genügt es, zu jeder Variablen A in $V_{l,k}$ den Wert von l' und die Regel $A \rightarrow BC$ zu speichern, die zur Aufnahme von A in $V_{l,k}$ geführt haben. Im Fall $S \in V_{n,1}(x)$ lässt sich dann mithilfe dieser Information leicht ein Syntaxbaum T von x konstruieren.

Beispiel 98. Betrachte die CNF-Grammatik mit den Produktionen

$$S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c; \quad S' \rightarrow BC; \quad X \rightarrow AS, BX', a; \quad X' \rightarrow XX;$$

$$Y \rightarrow BS, AY', b; \quad Y' \rightarrow YY; \quad A \rightarrow a; \quad B \rightarrow b; \quad C \rightarrow c.$$

Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

$x_k:$	a	b	b
$l:1$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

Wegen $S \notin V_{3,1}(abb)$ ist $x \notin L(G)$.

Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ wegen $S \in V_{6,1}(aababb)$ zu $L(G)$:

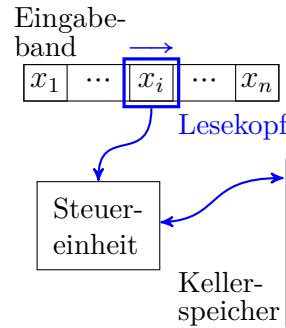
a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

3.4 Kellerautomaten

Wie müssen wir das Maschinenmodell des DFA erweitern, damit die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und alle anderen kontextfreien Sprachen erkannt werden können? Dass ein DFA die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht erkennen kann, liegt an seinem beschränkten Speichervermögen, das zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf.

Um L erkennen zu können, reicht bereits ein so genannter Kellerspeicher (Stapel, engl. *stack*, *pushdown memory*) aus. Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse. Ein Kellerautomat

- verfügt über einen Kellerspeicher,
- kann ε -Übergänge machen,
- hat Lesezugriff auf das aktuelle Eingabezeichen und auf das oberste Kellersymbol,
- kann in jedem Schritt das oberste Kellersymbol löschen und durch beliebig viele Symbole ersetzen.



Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M , d.h.

$$\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}.$$

Definition 99. Ein **Kellerautomat mit Endzuständen** (auch **FS-PDA** für engl. *final state pushdown automaton*) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$. Dabei ist

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ das **Eingabealphabet**,
- Γ das **Kelleralphabet**,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die **Überföhrungsfunktion**,

- $q_0 \in Z$ der **Startzustand**,
- $\# \in \Gamma$ das **Kelleranfangszeichen** und
- $E \subseteq Z$ die Menge der **Endzustände**.

Wenn q der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(p, B_1 \dots B_k) \in \delta(q, u, A)$

- in den Zustand p wechseln,
- den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u|$ Positionen vorrücken und
- das Zeichen A im Keller durch die Zeichenfolge $B_1 \dots B_k$ ersetzen.

Hierfür sagen wir auch, M führt die **Anweisung** $quA \rightarrow pB_1 \dots B_k$ aus. Da im Fall $u = \varepsilon$ kein Eingabezeichen gelesen wird, spricht man auch von einem **spontanen** Übergang (oder **ε -Übergang**). Zudem spricht man im Fall $k = 0$ von einer **pop-Operation** und im Fall $k = 2$ und $B_2 = A$ von einer **push-Operation**.

Eine **Konfiguration** wird durch ein Tripel

$$K = (q, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

beschrieben und besagt, dass

- q der momentane Zustand,
- $x_i \dots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
- $A_1 \dots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 steht oben).

Eine Anweisung $quA_1 \rightarrow pB_1 \dots B_k$ (mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$) überführt die Konfiguration K in die **Folgekonfiguration**

$$K' = (p, x_j \dots x_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_l) \text{ mit } j = i + |u|.$$

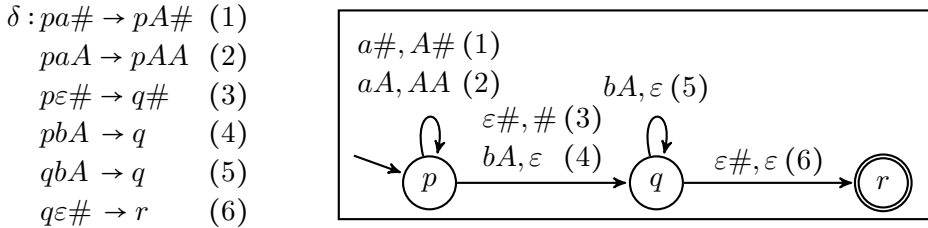
Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$. Eine **Rechnung** von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = (q_0, x, \#)$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots$. K_0 heißt **Startkonfiguration**

von M bei Eingabe x . Die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir wie üblich mit $\vdash^*$. Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in E, \alpha \in \Gamma^*: (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \alpha)\}.$$

Ein Kellerautomat M mit Endzuständen akzeptiert also genau dann ein Wort x , wenn es eine Rechnung gibt, bei der M das gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und einen Endzustand erreicht.

Beispiel 100. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#, E)$ mit $Z = \{p, q, r\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$, $E = \{r\}$ und der Überföhrungsfunktion



Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$\begin{aligned} (p, aabb, \#) &\vdash_{(1)} (p, abb, A\#) \vdash_{(2)} (p, bb, AA\#) \vdash_{(4)} (q, b, A\#) \vdash_{(5)} (q, \varepsilon, \#) \\ &\vdash_{(6)} (r, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Es gibt noch ein weiteres Akzeptanzkriterium, das die Angabe von Endzuständen überflüssig macht. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein Kellerautomat ohne Endzustandsmenge. Die von M **durch Leeren des Kellers akzeptierte (oder erkannte) Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in Z : (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Wir nennen M auch einen **ES-PDA** (für engl. *empty stack pushdown automaton*) oder einfach **PDA**. Ein Wort x wird also genau dann von einem PDA M akzeptiert, wenn es eine Rechnung gibt, bei der M das

gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und den Keller leert. Man beachte, dass bei leerem Keller kein weiterer Übergang mehr möglich ist.

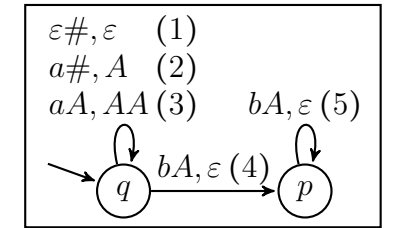
In den Übungen wird gezeigt, dass FS-PDAs und ES-PDAs gleichmächtig sind, d.h. es gilt

$$\{L(M) \mid M \text{ ist ein FS-PDA}\} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein ES-PDA}\}.$$

Beispiel 101. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ ein PDA mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und den Anweisungen

δ :

- $q\varepsilon\# \rightarrow q$ (1)
- $qa\# \rightarrow qA$ (2)
- $qaA \rightarrow qAA$ (3)
- $qbA \rightarrow p$ (4)
- $pbA \rightarrow p$ (5)



Dann akzeptiert M die Eingabe $aabb$:

$$(q, aabb, \#) \vdash_{(2)} (q, abb, A) \vdash_{(3)} (q, bb, AA) \vdash_{(4)} (p, b, A) \vdash_{(5)} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

$$n = 0: (q, \varepsilon, \#) \vdash_{(1)} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

$$n \geq 1: (q, a^n b^n, \#) \vdash_{(2)} (q, a^{n-1} b^n, A) \vdash_{(3)}^{n-1} (q, b^n, A^n)$$

$$\vdash_{(4)} (p, b^{n-1}, A^{n-1}) \vdash_{(5)}^{n-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Dies zeigt $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq L(M)$. Als nächstes zeigen wir, dass jede von M akzeptierte Eingabe $x = x_1 \dots x_n$ die Form $x = a^m b^m$ hat.

Ausgehend von der Startkonfiguration $(q, x, \#)$ sind nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar. Falls M Anweisung (1) wählt, wird der Keller geleert. Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \varepsilon = a^0 b^0$ akzeptieren.

Falls die akzeptierende Rechnung mit Anweisung (2) beginnt, muss $x_1 = a$ sein. Danach ist nur Anweisung (3) ausführbar, bis M das

erste b liest:

$$\begin{aligned} (q, x_1 \dots x_n, \#) &\vdash_{(2)} (q, x_2 \dots x_n, A) \vdash_{(3)}^{m-1} (q, x_{m+1} \dots x_n, A^m) \\ &\vdash_{(4)} (p, x_{m+2} \dots x_n, A^{m-1}) \end{aligned}$$

mit $x_1 = x_2 = \dots = x_m = a$ und $x_{m+1} = b$. Damit M den Keller leeren kann, müssen jetzt noch genau $m-1$ b 's kommen, weshalb x auch in diesem Fall die Form $a^m b^m$ hat. $\triangleleft$

Als nächstes zeigen wir, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen.

Satz 102. $\text{CFL} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$.

Beweis. Idee: Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$, so dass gilt:

$$S \Rightarrow_L^* x_1 \dots x_n \text{ gdw. } (q, x_1 \dots x_n, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Hierzu fügen wir für jede Regel $A \rightarrow_G \alpha$ in P die Anweisung $q\varepsilon A \rightarrow q\alpha$ und für jedes $a \in \Sigma$ die Anweisung $qaa \rightarrow q\varepsilon$ zu δ hinzu.

M berechnet also nichtdeterministisch eine Linksableitung für die Eingabe x . Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet. Nun ist leicht zu sehen, dass sogar folgende Äquivalenz gilt:

$$S \Rightarrow_L^m x_1 \dots x_n \text{ gdw. } (q, x_1 \dots x_n, S) \vdash^{m+n} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Daher folgt

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow (q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in L(M). \quad \blacksquare$$

Beispiel 103. Sei $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P: S \rightarrow aSbS, (1) \quad S \rightarrow a. (2)$$

Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

$$\begin{aligned} \delta: qaa &\rightarrow q\varepsilon, & (0) \quad qbb &\rightarrow q\varepsilon, & (0') \\ q\varepsilon S &\rightarrow qaSbS, & (1') \quad q\varepsilon S &\rightarrow qa. & (2') \end{aligned}$$

Der Linksableitung

$$\underline{S} \Rightarrow_{(1)} a\underline{S}bS \Rightarrow_{(2)} aab\underline{S} \Rightarrow_{(2)} aaba$$

in G entspricht beispielsweise die akzeptierende Rechnung

$$\begin{aligned} (q, aaba, S) &\vdash_{(1')} (q, aaba, aSbS) \vdash_{(0)} (q, aba, SbS) \\ &\vdash_{(2')} (q, aba, abS) \vdash_{(0)} (q, ba, bS) \\ &\vdash_{(0')} (q, a, S) \vdash_{(2')} (q, a, a) \vdash_{(0)} (q, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

von M und umgekehrt. $\triangleleft$

Obige Konstruktion eines PDA M aus einer kontextfreien Grammatik lässt sich leicht umdrehen, falls M nur einen Zustand hat. Zu einem solchen PDA $M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z, \#)$ lässt sich wie folgt eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, X_\#)$ mit $L(G) = L(M)$ konstruieren:

- Die Variablenmenge von G ist $V = \{X_A \mid A \in \Gamma\}$ (im Fall $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ können wir auch einfach $V = \Gamma$ setzen)
- die Startvariable von G ist $X_\#$ und
- P enthält für jede Anweisung $zuA \rightarrow zA_1 \dots A_k$ von M die Regel

$$X_A \rightarrow uX_{A_1} \dots X_{A_k}$$

Dann lässt sich jede akzeptierende Rechnung $(z, x, \#) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon)$ von $M(x)$ der Länge m direkt in eine Linksableitung $X_\# \Rightarrow_L^m x$ in G der Länge m transformieren und umgekehrt.

Beispiel 104. Betrachte den PDA $M = (\{z\}, \{a, b\}, \{S, a, b\}, \delta, z, S)$ mit den Anweisungen

$$\delta: zaa \rightarrow z \quad (1) \quad zbb \rightarrow z \quad (2) \quad z\varepsilon S \rightarrow zaSb \quad (3) \quad z\varepsilon S \rightarrow z \quad (4)$$

den wir aus der Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den beiden Regeln $S \rightarrow aSb, \varepsilon$ konstruiert haben. Dann führt M auf die Grammatik $G' = (\{X_S, X_a, X_b\}, \{a, b\}, P', X_S)$ mit den Regeln

$$P': X_a \rightarrow a \quad (1') \quad X_b \rightarrow b \quad (2') \quad X_S \rightarrow X_a X_S X_b \quad (3') \quad X_S \rightarrow \varepsilon \quad (4')$$

Der Rechnung

$$(z, ab, S) \vdash_{(3)} (z, ab, aSb) \vdash_{(1)} (z, b, Sb) \vdash_{(4)} (z, b, b) \vdash_{(2)} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

von M entspricht dann folgende Linksableitung in G (und umgekehrt):

$$\underline{X_S} \xRightarrow{(3')} \underline{X_a} X_S X_b \xRightarrow{(1')} a \underline{X_S} X_b \xRightarrow{(4')} a \underline{X_b} \xRightarrow{(2')} ab$$

Man beachte, dass G' eine aufgeblähte Variante von G ist. $\triangleleft$

Um also zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L(M)$ zu konstruieren, genügt es, M wie folgt in einen äquivalenten PDA $M' = (\{z\}, \Sigma, \Gamma', \delta', z, S)$ mit nur einem Zustand z zu transformieren:

- Das Kelleralphabet von M' ist $\Gamma' = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid A \in \Gamma, p, q \in Z\}$.
- Zudem fügen wir die folgenden Anweisungen zu δ' hinzu:
 - für jeden Zustand $q \in Z$ die Anweisung

$$z\varepsilon S \rightarrow zX_{q_0\#q}$$

- für jede Anweisung $p_0 u A_0 \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, von M und für jede Folge $p_2, \dots, p_{k+1} \in Z$ von k Zuständen die Anweisung

$$zuX_{p_0 A_0 p_{k+1}} \rightarrow zX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$$

Dabei rät M' durch die Wahl der Anweisung

- $z\varepsilon S \rightarrow zX_{q_0\#q}$ den Zustand q , den M mit leerem Keller (also im letzten Rechenschritt) erreicht, und
- $zuX_{p_0 A_0 p_{k+1}} \rightarrow zX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$ im Fall $k \geq 2$ für $i = 1, \dots, k-1$ die Zustände p_{i+1} , die M bei Freigabe der mit A_i belegten Speicherzelle erreicht. Man beachte, dass der Zustand p_{k+1} durch das aktuelle oberste Kellersymbol $X_{p_0 A_0 p_{k+1}}$ bereits vorgegeben ist, da er mit dem Zustand identisch ist, den M bei Freigabe der mit A_0 belegten Speicherzelle erreicht und daher schon geraten wurde als diese Speicherzelle belegt wurde.

Zudem verifiziert M' bei jeder pop-Operation $zuX_{p_0 A_0 p_1} \rightarrow z$, dass M den (zuvor geratenen) Zustand p_1 bei Freigabe der mit A_0 belegten Speicherzelle auch tatsächlich erreichen kann. Damit die Verifikation möglich ist, muss M' zu diesem Zeitpunkt nicht nur den aktuellen Zustand p_0 und das oberste Kellersymbol A_0 von M , sondern auch den Folgezustand p_1 nach der pop-Operation kennen.

Wir werden gleich zeigen, dass jede Rechnung $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ von M einer Rechnung $(z, x, X_{pAq}) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon)$ von M' entspricht und umgekehrt. Aus dieser Äquivalenz folgt nun sofort $L(M) = L(M')$:

$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow M \text{ hat für ein } q \in Z \text{ eine akzeptierende Rechnung} \\ &\quad (q_0, x, \#) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ der Länge } m \geq 1 \\ &\Leftrightarrow M' \text{ hat für ein } q \in Z \text{ eine akzeptierende Rechnung} \\ &\quad (z, x, S) \vdash (z, x, X_{q_0\#q}) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ mit } m \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in L(M') \end{aligned}$$

Beispiel 105. Betrachte den PDA $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{aligned} \delta: p\varepsilon\# \rightarrow q \quad (1) \quad pa\# \rightarrow pA \quad (2) \quad paA \rightarrow pAA \quad (3) \\ pbA \rightarrow q \quad (4) \quad qbA \rightarrow q \quad (5) \end{aligned}$$

Der zugehörige PDA $M' = (\{z\}, \{a, b\}, \Gamma', \delta', z, S)$ mit nur einem Zustand hat dann das Kelleralphabet

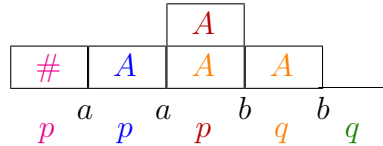
$$\Gamma' = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}$$

Zudem enthält M' neben den beiden Anweisungen $z\varepsilon S \rightarrow zX_{p\#p}$ (0) und $z\varepsilon S \rightarrow zX_{p\#q}$ (0') die folgenden Anweisungen:

Anweisung von M	k	$p_2, \dots, p_{k+1}$	Anweisungen von M'
$p\varepsilon\# \rightarrow q$	(1)	0	$z\varepsilon X_{p\#q} \rightarrow z$ (1')
$pa\# \rightarrow pA$	(2)	1	$zaX_{p\#p} \rightarrow zX_{pAp}$ (2') $zaX_{p\#q} \rightarrow zX_{pAq}$ (2'')
$paA \rightarrow pAA$	(3)	2	$zaX_{pAp} \rightarrow zX_{pAp}X_{pAp}$ (3') $zaX_{pAq} \rightarrow zX_{pAp}X_{pAq}$ (3'') $zaX_{qAp} \rightarrow zX_{pAq}X_{qAp}$ (3''') $zaX_{qAq} \rightarrow zX_{pAq}X_{qAq}$ (3''')
$pbA \rightarrow q$	(4)	0	$zbX_{pAq} \rightarrow z$ (4')
$qbA \rightarrow q$	(5)	0	$zbX_{qAq} \rightarrow z$ (5')

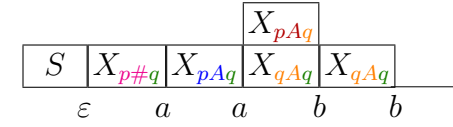
Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (p, abb, A) \xrightarrow{(3)} (p, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (q, b, A) \xrightarrow{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$\begin{aligned} (z, aabb, S) &\xrightarrow{(0')} (z, aabb, X_{p\#q}) \xrightarrow{(2'')} (z, abb, X_{pAq}) \\ &\xrightarrow{(3''')} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \xrightarrow{(4')} (z, b, X_{qAq}) \xrightarrow{(5')} (z, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$



Es bleibt noch zu zeigen, dass für alle $p, q \in Z$, $A \in \Gamma$, $x \in \Sigma^*$ und $m \geq 0$ gilt:

$$(p, x, A) \vdash_M^m (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } (z, x, X_{pAq}) \vdash_{M'}^m (z, \varepsilon, \varepsilon) \quad (*)$$

Induktionsanfang ($m = 0$): Da weder M noch M' in $m = 0$ Rechenschritten ein Symbol aus dem Keller entfernen kann, gilt die Äquivalenz $(*)$ für $m = 0$.

Induktionsschritt ($m \rightsquigarrow m + 1$): Sei eine Rechnung $(p, x, A) \vdash^{m+1} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ der Länge $m + 1$ von M gegeben und sei $puA \rightarrow p_1A_1 \dots A_k$ die im ersten Rechenschritt ausgeführte Anweisung:

$$(p, x, A) \vdash (p_1, x', A_1 \dots A_k) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Im Fall $k \geq 2$ sei p_i für $i = 2, \dots, k$ der Zustand, in den M mit dem Kellerinhalt $A_i \dots A_k$ gelangt. Dann hat M' die Anweisung $zuX_{pAq} \rightarrow zX_{p_1A_1p_2} \dots X_{p_{k-1}A_{k-1}p_k}X_{p_kA_kq}$. Zudem sei u_i für $i = 1, \dots, k$ das zwischen den Besuchen von p_i und p_{i+1} gelesene Teilwort von x , wobei $p_{k+1} = q$ ist. Dann gilt $x = ux'$ und $x' = u_1 \dots u_k$ sowie

$$(p_1, x', A_1 \dots A_k) \vdash^* (p_i, u_i \dots u_k, A_i \dots A_k) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Für $i = 1, \dots, k$ ex. daher Zahlen $m_i \geq 1$ mit

$$(p_i, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } m_1 + \dots + m_k = m$$

Daher hat M' nach IV die Rechnungen $(z, u_i, X_{p_iA_i p_{i+1}}) \vdash^{m_i} (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Zudem hat M' wegen $puA \rightarrow_M p_1A_1 \dots A_k$ die Anweisung $zuX_{pAq} \rightarrow zX_{p_1A_1p_2} \dots X_{p_{k-1}A_{k-1}p_k}X_{p_kA_kq}$, so dass wir die

gesuchte Rechnung der Länge $m + 1$ von M' wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned}
(z, x, X_{pAq}) &= (z, uu_1 \dots u_k, X_{pAq}) \\
&\vdash (z, u_1 \dots u_k, X_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_{k-1} A_{k-1} p_k} X_{p_k A_k q}) \\
&\vdash^{m_1} (z, u_2 \dots u_k, X_{p_2 A_2 p_3} \dots X_{p_{k-1} A_{k-1} p_k} X_{p_k A_k q}) \\
&\vdots \\
&\vdash^{m_{k-1}} (z, u_k, X_{p_k A_k q}) \\
&\vdash^{m_k} (z, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Entsprechend lässt sich umgekehrt aus jeder solchen Rechnung von M' eine Rechnung $(p, x, A) \vdash^{m+1} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ von M gewinnen.

Wir können die beiden Schritte

- PDA $M \rightarrow$ PDA M' mit nur einem Zustand und
- PDA M' mit nur einem Zustand $\rightarrow$ kontextfreie Grammatik G

zu einem Schritt zusammenfassen. Dazu konstruieren wir wie folgt zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine äquivalente kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$. Die Variablenmenge von G ist

$$V = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid A \in \Gamma, p, q \in Z\}$$

und P enthält für jeden Zustand $q \in Z$ die Regel

$$S \rightarrow X_{q_0 \# q}$$

und für jede Anweisung $puA \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, von M und jede Zustandsfolge $p_2, \dots, p_{k+1}$ die Regel

$$X_{pAp_{k+1}} \rightarrow uX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$$

Beispiel 106. Sei M der PDA $(\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit

$$\begin{aligned}
\delta : p\varepsilon\# \rightarrow q\varepsilon, \quad (1) \quad paA \rightarrow pAA, \quad (3) \quad qbA \rightarrow q\varepsilon. \quad (5) \\
pa\# \rightarrow pA, \quad (2) \quad pbA \rightarrow q\varepsilon, \quad (4)
\end{aligned}$$

Dann erhalten wir die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der Variablenmenge

$$V = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}.$$

Die Regelmengemenge P enthält neben den beiden Startregeln

$$S \rightarrow X_{p\#p}, X_{p\#q} \quad (0, 0')$$

die folgenden Produktionen:

Anweisung	k	$p_2, \dots, p_{k+1}$	zugehörige Regel
$puA \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k$			$X_{pAp_{k+1}} \rightarrow uX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$
$p\varepsilon\# \rightarrow q\varepsilon$	(1)	0	$X_{p\#q} \rightarrow \varepsilon$ (1')
$pa\# \rightarrow pA$	(2)	1	$X_{p\#p} \rightarrow aX_{pAp}$ (2')
		q	$X_{p\#q} \rightarrow aX_{pAq}$ (2'')
$paA \rightarrow pAA$	(3)	2	$X_{pAp} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAp}$ (3')
		p, q	$X_{pAq} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAq}$ (3'')
		q, p	$X_{pAp} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAp}$ (3''')
		q, q	$X_{pAq} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAq}$ (3''')
$pbA \rightarrow q\varepsilon$	(4)	0	$X_{pAq} \rightarrow b$ (4')
$qbA \rightarrow q\varepsilon$	(5)	0	$X_{qAq} \rightarrow b$ (5')

Der akzeptierenden Rechnung

$$(p, aabb, \#) \vdash_{(2)} (p, abb, A) \vdash_{(3)} (p, bb, AA) \vdash_{(4)} (q, b, A) \vdash_{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

von M entspricht dann die Ableitung

$$S \Rightarrow_{(0')} X_{p\#q} \Rightarrow_{(2'')} aX_{pAq} \Rightarrow_{(3''')} aaX_{pAq}X_{qAq} \Rightarrow_{(4')} aabX_{qAq} \Rightarrow_{(5')} aabb$$

in G und umgekehrt. $\triangleleft$

3.5 Deterministisch kontextfreie Sprachen

Von besonderem Interesse sind kontextfreie Sprachen, die von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt werden können.

Definition 107. Sei M ein ES-PDA oder FS-PDA. M heißt **deterministisch**, falls $\vdash$ eine rechtseindeutige Relation ist:

$$K \vdash K_1 \wedge K \vdash K_2 \Rightarrow K_1 = K_2.$$

Äquivalent hierzu ist, dass die Überföhrungsfunktion δ für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1. \quad (*)$$

Dies liegt daran, dass eine Konfiguration $K = (q, x_{i+1} \dots x_n, A_1 \dots A_k)$, $0 \leq i \leq n$, genau

$$N(K) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \|\delta(q, \varepsilon, A_1)\|, & i = n \text{ und } k \geq 1 \\ \|\delta(q, x_{i+1}, A_1)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A_1)\|, & i < n \text{ und } k \geq 1 \end{cases}$$

verschiedene Folgekonfigurationen hat.

Beispiel 108. Der ES-PDA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#)$ mit der Überföhrungsfunktion

$$\begin{array}{llll} \delta: q_0 a \# \rightarrow q_0 A \# & q_0 b \# \rightarrow q_0 B \# & q_0 a A \rightarrow q_0 A A & q_0 b A \rightarrow q_0 B A \\ q_0 a B \rightarrow q_0 A B & q_0 b B \rightarrow q_0 B B & q_0 c A \rightarrow q_1 A & q_0 c B \rightarrow q_1 B \\ q_1 a A \rightarrow q_1 & q_1 b B \rightarrow q_1 & q_1 \varepsilon \# \rightarrow q_2 & \end{array}$$

erkennt die Sprache $L(M) = \{x c x^R \mid x \in \{a, b\}^+\}$. Um auf einen Blick erkennen zu können, ob M deterministisch ist, empfiehlt es sich, δ in Form einer Tabelle darzustellen:

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε	–	–	–	q_2	–	–	–	–	–
a	$q_0 A \#$	$q_0 A A$	$q_0 A B$	–	q_1	–	–	–	–
b	$q_0 B \#$	$q_0 B A$	$q_0 B B$	–	–	q_1	–	–	–
c	–	$q_1 A$	$q_1 B$	–	–	–	–	–	–

Man beachte, dass jedes Tabellenfeld höchstens eine Anweisung enthält und jede Spalte, die einen ε -Eintrag in der ersten Zeile hat, sonst keine weiteren Einträge enthält. Daher ist für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ die Bedingung

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$$

erfüllt. ◁

Von deterministischen ES-PDAs können nicht alle regulären Sprachen erkannt werden. Um beispielsweise die Sprache $L = \{a, aa\}$ zu erkennen, muss der Keller von M nach Lesen von a geleert werden. Daher ist es M nicht mehr möglich, die Eingabe aa zu akzeptieren. Deterministische ES-PDAs können also nur **präfixfreie** Sprachen L akzeptieren (d.h. kein Wort $x \in L$ ist Präfix eines anderen Wortes in L). Aus diesem Grund verwenden wir zur Definition der deterministisch kontextfreien Sprachen FS-DPDAs anstelle von ES-DPDAs.

Definition 109. Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist definiert durch

$$\mathbf{DCFL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein deterministischer FS-PDA}\}.$$

(deterministic context free languages). Ein deterministischer FS-PDA wird auch als **FS-DPDA** (für engl. Final State Deterministic Push Down Automaton) oder einfach als DPDA bezeichnet.

Als nächstes zeigen wir, dass DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Versuchen wir, die End- und Nichtendzustände eines DPDA M einfach zu vertauschen, um einen DPDA $\bar{M}$ für $L(M)$ zu erhalten, so ergeben sich folgende Schwierigkeiten:

1. Falls M eine Eingabe x nicht zu Ende liest, wird x weder von M noch von $\overline{M}$ akzeptiert.
2. Falls M nach dem Lesen von x noch ε -Übergänge ausführt und dabei End- und Nichtendzustände besucht, wird x von M und von $\overline{M}$ akzeptiert.

Der nächste Satz zeigt, wie sich Problem 1 beheben lässt.

Satz 110. *Jede Sprache $L \in \text{DCFL}$ wird von einem DPDA M' erkannt, der alle Eingaben zu Ende liest.*

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA mit $L(M) = L$. Falls M eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n$ nicht zu Ende liest, muss einer der folgenden drei Gründe vorliegen:

1. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, \varepsilon)$, $i \leq n$, mit leerem Keller.
2. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, in der wegen $\delta(q, x_i, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$ keine Anweisung ausführbar ist.
3. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) eine unendliche Folge von ε -Anweisungen ausführt.

Die erste Ursache schließen wir aus, indem wir ein neues Zeichen $\square$ auf dem Kellerboden platzieren:

(a) $s\varepsilon\# \rightarrow q_0\#\square$ (dabei sei s der neue Startzustand).

Die zweite Ursache schließen wir durch Hinzunahme eines Fehlerzustands r sowie folgender Anweisungen aus (hierbei ist $\Gamma' = \Gamma \cup \{\square\}$):

(b) $qaA \rightarrow rA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$,

(c) $raA \rightarrow rA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$.

Als nächstes verhindern wir die Ausführung einer unendlichen Folge von ε -Übergängen. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle, ob M hierbei auch Endzustände besucht oder nicht. Falls ja, sehen wir einen Umweg über den neuen Endzustand t vor.

(d) $q\varepsilon A \rightarrow rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε -Übergänge ausführt ohne dabei einen Endzustand zu besuchen.

(e) $q\varepsilon A \rightarrow tA$
 $t\varepsilon A \rightarrow rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε -Übergänge ausführt und dabei auch Endzustände besucht.

Schließlich übernehmen wir von M die folgenden Anweisungen:

(f) alle Anweisungen aus δ , soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (d) oder (e) überschrieben wurden.

Zusammenfassend transformieren wir M in den DPDA

$$M' = (Z \cup \{r, s, t\}, \Sigma, \Gamma', \delta', s, \#, E \cup \{t\})$$

mit $\Gamma' = \Gamma \cup \{\square\}$, wobei δ' die unter (a) bis (f) genannten Anweisungen enthält. ■

Beispiel 111. *Wenden wir diese Konstruktion auf den DPDA*

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$$

mit der Überföhrungsfunktion

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε	—	—	—	q_2	—	—	$q_2\#$	—	—
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	—	q_1	—	—	—	—
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	—	—	q_1	—	—	—
c	—	q_1A	q_1B	—	—	—	—	—	—

an, so erhalten wir den DPDA

$$M' = (\{q_0, q_1, q_2, r, s, t\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#, \square\}, \delta', s, \#, \{q_2, t\})$$

mit folgender Überföhrungsfunktion δ' :

δ'	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_0, \square$	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_1, \square$	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B	$q_2, \square$
ε	–	–	–	–	q_2	–	–	–	$t\#$	–	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	$r\square$	–	q_1	rB	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	$r\square$	–	rA	q_1	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
c	$r\#$	q_1A	q_1B	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
Typ	(f, b)	(f)	(f)	(b)	(f)	(f, b)	(f, b)	(b)	(e)	(b)	(b)	(b)
	$s, \#$	s, A	s, B	$s, \square$	$r, \#$	r, A	r, B	$r, \square$	$t, \#$	t, A	t, B	$t, \square$
ε	$q_0\#\square$	–	–	–	–	–	–	–	$r\#$	–	–	–
a	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
b	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
c	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
Typ	(a)				(c)	(c)	(c)	(c)	(e)			

◁

Satz 112. Die Klasse DCFL ist unter Komplement abgeschlossen, d.h. es gilt $\text{DCFL} = \text{co-DCFL}$.

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA, der alle Eingaben zu Ende liest, und sei $L(M) = L$. Wir konstruieren einen DPDA $\bar{M}$ für $\bar{L}$.

Die Idee dabei ist, dass sich $\bar{M}$ in seinem Zustand (q, i) neben dem aktuellen Zustand q von M in der Komponente i merkt, ob M nach Lesen des letzten Zeichens (bzw. seit Rechnungsbeginn) einen Endzustand besucht hat ($i = 1$) oder nicht ($i = 2$). Möchte M das nächste Zeichen lesen und befindet sich $\bar{M}$ im Zustand $(q, 2)$, so macht $\bar{M}$ noch einen Umweg über den Endzustand $(q, 3)$.

Konkret erhalten wir $\bar{M} = (Z \times \{1, 2, 3\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, Z \times \{3\})$ mit

$$s = \begin{cases} (q_0, 1), & q_0 \notin E, \\ (q_0, 2), & \text{sonst,} \end{cases}$$

indem wir zu δ' für jede Anweisung $q\varepsilon A \rightarrow_M p\gamma$ die beiden Anweisungen

$$(q, 1)\varepsilon A \rightarrow (p, i)\gamma \quad \text{mit} \quad i = \begin{cases} 1, & p \in E, \\ 2, & p \notin E, \end{cases}$$

sowie für jede Anweisung $qaA \rightarrow_M p\gamma$ die drei Anweisungen

$$\begin{aligned} (q, 1)aA &\rightarrow (p, i)\gamma \\ (q, 2)\varepsilon A &\rightarrow (q, 3)A \\ (q, 3)aA &\rightarrow (p, i)\gamma \end{aligned} \quad \text{mit} \quad i = \begin{cases} 1, & p \in E, \\ 2, & p \notin E \end{cases}$$

hinzufügen. ■

Eine nützliche Eigenschaft von $\bar{M}$ ist, dass $\bar{M}$ in einem Endzustand keine ε -Übergänge macht.

Beispiel 113. Angenommen, ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ führt bei der Eingabe $x = a$ folgende Rechnung aus:

$$(q_0, a, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_2, \varepsilon, \#).$$

Dann würde $\bar{M}$ im Fall $E = \{q_0, q_2\}$ (d.h. $x \in L(M)$) die Rechnung

$$((q_0, 2), a, \#) \vdash ((q_0, 3), a, \#) \vdash ((q_1, 2), \varepsilon, \#) \vdash ((q_2, 1), \varepsilon, \#)$$

ausführen. Da $(q_1, 2), (q_2, 1) \notin Z \times \{3\}$ sind, verwirft also $\bar{M}$ das Wort a . Dagegen würde $\bar{M}$ im Fall $E = \{q_0\}$ (d.h. $x \notin L(M)$) die Rechnung

$$((q_0, 1), a, \#) \vdash ((q_1, 2), \varepsilon, \#) \vdash ((q_2, 2), \varepsilon, \#) \vdash ((q_2, 3), \varepsilon, \#)$$

ausführen. Da $(q_2, 3) \in Z \times \{3\}$ ein Endzustand von $\bar{M}$ ist, würde $\bar{M}$ nun also das Wort a akzeptieren. ▷

Satz 114. Die Klasse DCFL ist nicht abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Beweis. Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \text{ und } L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind deterministisch kontextfrei (siehe Übungen). Da der Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist, liegt er auch nicht in DCFL, also ist DCFL nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Da DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist, kann DCFL wegen de Morgan dann auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein. Beispielsweise sind folgende Sprachen deterministisch kontextfrei:

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \wedge i, j, k \geq 1\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \wedge i, j, k \geq 1\}.$$

Ihre Vereinigung $L_3 \cup L_4 = \{a^i b^j c^k \mid (i \neq j \vee j \neq k) \wedge i, j, k \geq 1\}$ gehört aber nicht zu DCFL, d.h. $L_3 \cup L_4 \in \text{CFL} \setminus \text{DCFL}$. DCFL ist nämlich unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen (siehe Übungen). Daher wäre mit $L_3 \cup L_4$ auch die Sprache

$$(\overline{L_3 \cup L_4}) \cap L(a^+ b^+ c^+) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

(deterministisch) kontextfrei.

Als nächstes zeigen wir, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist. Wir wissen bereits, dass $L = L_3 \cup L_4 \notin \text{DCFL}$ ist. Dann ist auch die Sprache

$$0L = 0L_3 \cup 0L_4 \notin \text{DCFL},$$

da sich ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ für $0L$ leicht zu einem DPDA für L umbauen ließe. Sei nämlich (p, ε, γ) die Konfiguration, die M nach Lesen der Eingabe 0 erreicht. Dann erkennt der DPDA $M' = (Z \cup \{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, E)$ die Sprache L , wobei δ' wie folgt definiert ist:

$$\delta'(q, u, A) = \begin{cases} (p, \gamma), & (q, u, A) = (s, \varepsilon, \#), \\ \delta(q, u, A), & (q, u, A) \in Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Sprachen $\{\varepsilon, 0\}$ und $L_5 = L_3 \cup 0L_4$ in DCFL sind (siehe Übungen). Ihr Produkt $\{\varepsilon, 0\}L_5 = L_5 \cup 0L_5 = L_3 \cup 0L_4 \cup 0L_3 \cup 00L_4$ gehört aber nicht zu DCFL. Da DCFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen ist (siehe Übungen), wäre andernfalls auch

$$\{\varepsilon, 0\}L_5 \cap L(0a^*b^*c^*) = 0L_3 \cup 0L_4$$

in DCFL, was wir bereits ausgeschlossen haben. ■

Dass DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist, lässt sich ganz ähnlich zeigen (siehe Übungen). Wir fassen die bewiesenen Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL und CFL in folgender Tabelle zusammen:

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja

Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen lässt sich auch mit Hilfe von speziellen kontextfreien Grammatiken charakterisieren, den so genannten $LR(k)$ -Grammatiken. Der erste Buchstabe L steht hierbei für die Leserichtung bei der Syntaxanalyse, d.h. das Eingabewort x wird von links (nach rechts) gelesen. Der zweite Buchstabe R bedeutet, dass bei der Syntaxanalyse eine Rechtsableitung entsteht. Schließlich gibt der Parameter k an, wieviele Zeichen man über das aktuelle Eingabezeichen hinauslesen muss, damit der nächste Schritt eindeutig feststeht (k wird auch als *Lookahead* bezeichnet).

Durch $LR(0)$ -Grammatiken lassen sich nur die präfixfreien Sprachen in DCFL erzeugen. Dagegen erzeugen die $LR(k)$ -Grammatiken für jedes $k \geq 1$ genau die Sprachen in DCFL.

Daneben gibt es noch $LL(k)$ -Grammatiken, die für wachsendes k immer mehr deterministisch kontextfreie Sprachen erzeugen.

4 Kontextsensitive Sprachen

In diesem Kapitel führen wir das Maschinenmodell des linear beschränkten Automaten (LBA) ein und zeigen, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen. Die Klasse CSL ist unter Komplementbildung abgeschlossen. Es ist jedoch offen, ob die Klasse DCSL der von einem deterministischen LBA erkannten Sprachen eine echte Teilklasse von CSL ist (diese Frage ist als *LBA-Problem* bekannt).

4.1 Kontextsensitive Grammatiken

Zur Erinnerung: Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ heißt **kontextsensitiv**, falls für alle Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ gilt: $|\beta| \geq |\alpha|$. Als einzige Ausnahme hiervon ist die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ erlaubt. Allerdings nur dann, wenn das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt wird. Da L nicht kontextfrei ist, ist also die Klasse CFL echt in der Klasse CSL enthalten.

Beispiel 115. Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln

$$P: S \rightarrow aSBc, abc \quad (1, 2) \quad cB \rightarrow Bc \quad (3) \quad bB \rightarrow bb \quad (4)$$

In G läßt sich beispielsweise das Wort $w = aabbcc$ ableiten:

$$\underline{S} \xRightarrow{(1)} a\underline{S}Bc \xRightarrow{(2)} aabc\underline{B}c \xRightarrow{(3)} aab\underline{B}cc \xRightarrow{(4)} aabbcc$$

Allgemein gilt für alle $n \geq 1$:

$$S \xRightarrow{(1)} a^{n-1} S (Bc)^{n-1} \xRightarrow{(2)} a^n b c (Bc)^{n-1} \xRightarrow{(3)} a^n b B^{n-1} c^n \xRightarrow{(4)} a^n b^n c^n$$

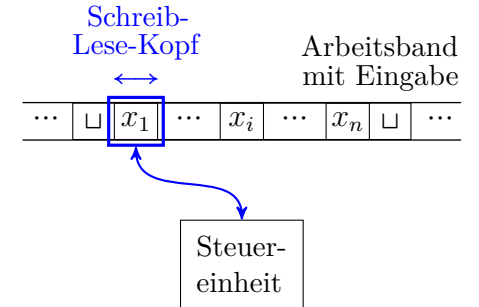
Also gilt $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \geq 1$. Umgekehrt folgt durch Induktion über die Ableitungslänge m , dass jede Satzform u mit $S \Rightarrow^m \alpha$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha) + \#_B(\alpha) = \#_c(\alpha)$,
- links von S und links von einem a kommen nur a 's vor,
- links von einem b kommen nur a 's oder b 's vor.

Daraus ergibt sich, dass in G nur Wörter der Form $w = a^n b^n c^n$ ableitbar sind. $\triangleleft$

4.2 Turingmaschinen

Um ein geeignetes Maschinenmodell für die kontextsensitiven Sprachen zu finden, führen wir zunächst das Rechenmodell der nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) ein. Eine NTM erhält ihre Eingabe auf einem nach links und rechts unbegrenzten Band. Während ihrer Rechnung kann sie den Schreib-Lese-Kopf auf dem Band in beide Richtungen bewegen und dabei die besuchten Bandfelder lesen sowie gegebenenfalls überschreiben.



Es gibt mehrere Arten von Turingmaschinen (u.a. mit einseitig unendlichem Band oder mit mehreren Schreib-Lese-Köpfen auf dem Band). Wir verwenden folgende Variante der Mehrband-Turingmaschine.

Definition 116. Sei $k \geq 1$.

- a) Eine **nichtdeterministische k -Band-Turingmaschine** (kurz **k -NTM** oder einfach **NTM**) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- Z eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet (wobei $\sqcup \notin \Sigma$),
- Γ das Arbeitsalphabet (wobei $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$),
- $\delta: Z \times \Gamma^k \rightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$ die Überföhrungsfunktion,
- q_0 der Startzustand und
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist.

b) Eine k -NTM M heißt **deterministisch** (kurz: M ist eine **k-DTM** oder einfach **DTM**), falls für alle $(q, a_1, \dots, a_k) \in Z \times \Gamma^k$ die Ungleichung $\|\delta(q, a_1, \dots, a_k)\| \leq 1$ gilt.

Für $(q', a'_1, \dots, a'_k, D_1, \dots, D_k) \in \delta(q, a_1, \dots, a_k)$ schreiben wir auch

$$(q, a_1, \dots, a_k) \rightarrow (q', a'_1, \dots, a'_k, D_1, \dots, D_k).$$

Eine solche Anweisung ist ausführbar, falls

- q der aktuelle Zustand von M ist und
- sich für $i = 1, \dots, k$ der Lesekopf des i -ten Bandes auf einem mit a_i beschrifteten Feld befindet.

Ihre Ausführung bewirkt, dass M

- vom Zustand q in den Zustand q' übergeht,
- auf Band i das Symbol a_i durch a'_i ersetzt und
- den Kopf gemäß D_i bewegt (L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung).

Definition 117. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k -NTM.

a) Eine **Konfiguration** von M ist ein $(3k + 1)$ -Tupel

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

und besagt, dass

- q der momentane Zustand ist und

- das i -te Band mit $\dots \sqcup u_i a_i v_i \sqcup \dots$ beschriftet ist, wobei sich der Kopf auf dem Zeichen a_i befindet.

Im Fall $k = 1$ schreiben wir für eine Konfiguration (q, u, a, v) auch kurz $uqav$.

b) Die **Startkonfiguration** von M bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ ist

$$K_x = \begin{cases} (q_0, \varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x \neq \varepsilon, \\ (q_0, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x = \varepsilon. \end{cases}$$

c) Eine Konfiguration $K' = (q, u'_1, a'_1, v'_1, \dots, u'_k, a'_k, v'_k)$ heißt **Folgekonfiguration** von $K = (p, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$ (kurz $K \vdash K'$), falls eine Anweisung

$$(q, a_1, \dots, a_k) \rightarrow (q', b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k)$$

existiert, so dass für $i = 1, \dots, k$ gilt:

im Fall $D_i = N$:	$D_i = R$:	$D_i = L$:
$K: \overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K': \overline{u_i \boxed{b_i} v_i}$	$K: \overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K': \overline{u_i b_i \boxed{a'_i} v'_i}$	$K: \overline{u_i \boxed{a_i} v_i}$ $K': \overline{u'_i \boxed{a'_i} b_i v_i}$
$u'_i = u_i,$ $a'_i = b_i$ und $v'_i = v_i.$	$u'_i = u_i b_i$ und $a'_i v'_i = \begin{cases} v_i, & v_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst.} \end{cases}$	$u'_i a'_i = \begin{cases} u_i, & u_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$ und $v'_i = b_i v_i.$

Man beachte, dass sich die Länge der Bandinschrift $u_i a_i v_i$ beim Übergang von K zu K' genau dann um 1 erhöht, wenn in K' zum ersten Mal ein neues Feld auf dem i -ten Band besucht wird. Andernfalls bleibt die Länge von $u_i a_i v_i$ unverändert. Die Länge von $u_i a_i v_i$ entspricht also genau der Anzahl der bisher auf dem i -ten Band besuchten Felder (inkl. Eingabezeichen im Fall $i = 1$).

d) Eine **Rechnung** von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = K_x$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots$.

e) Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists K \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k : K_x \vdash^* K\}.$$

M akzeptiert also eine Eingabe x (hierfür sagen wir kurz $M(x)$ akzeptiert), falls es eine Rechnung $K_x = K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots \vdash K_l$ von $M(x)$ gibt, bei der ein Endzustand erreicht wird.

Beispiel 118. Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$, wobei δ folgende Anweisungen enthält:

$q_0a \rightarrow q_1AR$ (1) Anfang der Schleife: Ersetze das erste a durch A .

$q_1a \rightarrow q_1aR$ (2) Bewege den Kopf nach rechts bis zum ersten b
 $q_1B \rightarrow q_1BR$ (3) und ersetze dies durch ein B (falls kein b mehr
 $q_1b \rightarrow q_2BL$ (4) vorhanden ist, dann halte ohne zu akzeptieren).

$q_2a \rightarrow q_2aL$ (5) Bewege den Kopf zurück nach links bis ein A
 $q_2B \rightarrow q_2BL$ (6) kommt, gehe wieder ein Feld nach rechts und wie-
 $q_2A \rightarrow q_0AR$ (7) derhole die Schleife.

$q_0B \rightarrow q_3BR$ (8) Falls kein a am Anfang der Schleife, dann teste,
 $q_3B \rightarrow q_3BR$ (9) ob noch ein b vorhanden ist. Wenn ja, dann halte
 $q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N$ (10) ohne zu akzeptieren. Andernfalls akzeptiere.

Dann führt M bei Eingabe $aabb$ folgende Rechnung aus:

$$\begin{array}{ccccccc} q_0aabb & \vdash & Aq_1abb & \vdash & Aaq_1bb & \vdash & Aq_2aBb \\ (1) & & (2) & & (4) & & \\ & \vdash & q_2AaBb & \vdash & Aq_0aBb & \vdash & AAq_1Bb \\ (5) & & (7) & & (1) & & \\ & \vdash & AABq_1b & \vdash & AAq_2BB & \vdash & Aq_2ABB \\ (3) & & (4) & & (6) & & \\ & \vdash & AAq_0BB & \vdash & AABq_3B & \vdash & AABq_3\sqcup \\ (7) & & (8) & & (9) & & (10) \end{array} \quad AABq_4\sqcup$$

Ähnlich lässt sich $a^n b^n \in L(M)$ für ein beliebiges $n \geq 1$ zeigen. Andererseits führt die Eingabe abb auf die Rechnung

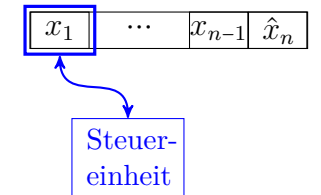
$$q_0abb \vdash_{(1)} Aq_1bb \vdash_{(4)} q_2ABb \vdash_{(7)} Aq_0Bb \vdash_{(8)} ABq_3b,$$

die nicht weiter fortsetzbar ist. Da M deterministisch ist, kann $M(abb)$ auch nicht durch eine andere Rechnung den Endzustand q_4 erreichen. D.h. abb gehört nicht zu $L(M)$. Tatsächlich lässt sich durch Betrachtung der übrigen Fälle ($x = a^n b^m$, $n > m$, $x = a^n b^m a^k$, $m, k \geq 1$, etc.) zeigen, dass M nur Eingaben der Form $a^n b^n$ akzeptiert, und somit $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist. $\triangleleft$

In den Übungen werden wir auch für die Sprache $L' = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ eine 1-DTM M' konstruieren. Wie M besucht auch M' außer den Eingabefeldern nur das erste Blank hinter der Eingabe. Dies ist notwendig, damit M' das Ende der Eingabe erkennen kann. Falls wir jedoch das letzte Zeichen der Eingabe x markieren, muss der Eingabebereich im Fall $|x| \geq 1$ für diesen Zweck nicht mehr verlassen werden.

4.3 Linear beschränkte Automaten

Eine 1-NTM M , die bei keiner Eingabe $x \neq \varepsilon$, deren letztes Zeichen markiert ist, den Bereich der Eingabe verlässt, wird als LBA (linear beschränkter Automat) bezeichnet. Ein LBA darf also bei Eingaben der Länge $n > 0$ während der Rechnung nur die n mit der Eingabe beschrifteten Bandfelder besuchen und überschreiben. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede k -NTM, die bei Eingaben der Länge n höchstens eine lineare Anzahl von Bandfeldern (also höchstens $cn + c$ Bandfelder für eine Konstante c) besucht, von einem LBA simuliert werden kann. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.



Definition 119.

- a) Für ein Alphabet Σ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ bezeichne $\hat{x}$ das Wort

$$\hat{x} = \begin{cases} x, & x = \varepsilon, \\ x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n, & x \neq \varepsilon \end{cases}$$

über dem Alphabet $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$.

- b) Eine 1-NTM $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ heißt **linear beschränkt** (kurz: M ist ein **LBA**), falls M bei jeder Eingabe $\hat{x}$ der Länge $n \geq 1$ höchstens n Bandfelder besucht:

$$\forall x \in \Sigma^+ : K_{\hat{x}} \vdash^* uqav \Rightarrow |uav| \leq |x|.$$

- c) Die von einem LBA **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(\hat{x}) \text{ akzeptiert}\}.$$

- d) Ein deterministischer LBA wird auch als **DLBA** bezeichnet.
e) Die Klasse der **deterministisch kontextsensitiven Sprachen** ist definiert als

$$\mathbf{DCSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DLBA}\}.$$

Beispiel 120. Es ist nicht schwer, die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ aus Beispiel 118 mit der Überföhrungsfunktion

$$\begin{aligned} \delta: q_0a \rightarrow q_1AR \quad (1) \quad q_2a \rightarrow q_2aL \quad (5) \quad q_3B \rightarrow q_3BR \quad (9) \\ q_1a \rightarrow q_1aR \quad (2) \quad q_2B \rightarrow q_2BL \quad (6) \quad q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N \quad (10) \\ q_1B \rightarrow q_1BR \quad (3) \quad q_2A \rightarrow q_0AR \quad (7) \\ q_1b \rightarrow q_2BL \quad (4) \quad q_0B \rightarrow q_3BR \quad (8) \end{aligned}$$

in einen DLBA M' für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ umzuwandeln.

Ersetze hierzu

- Σ durch $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$,

- Γ durch $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ sowie

- die Anweisung $q_3\sqcup \rightarrow q_4\sqcup N$ (10) durch $q_3\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$ (10')

und füge die Anweisungen $q_1\hat{b} \rightarrow q_2\hat{B}L$ (4a) und $q_0\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$ (8a) hinzu. Dann erhalten wir den DLBA $M' = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma', \delta', q_0, E)$ mit der Überföhrungsfunktion

$$\begin{aligned} \delta': q_0a \rightarrow q_1AR \quad (1) \quad q_1\hat{b} \rightarrow q_2\hat{B}L \quad (4a) \quad q_0B \rightarrow q_3BR \quad (8) \\ q_1a \rightarrow q_1aR \quad (2) \quad q_2a \rightarrow q_2aL \quad (5) \quad q_0\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N \quad (8a) \\ q_1B \rightarrow q_1BR \quad (3) \quad q_2B \rightarrow q_2BL \quad (6) \quad q_3B \rightarrow q_3BR \quad (9) \\ q_1b \rightarrow q_2BL \quad (4) \quad q_2A \rightarrow q_0AR \quad (7) \quad q_3\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N \quad (10') \end{aligned}$$

Das Wort $aabb$ wird nun von M' bei Eingabe $aabb\hat{b}$ durch die Rechnung

$$\begin{aligned} q_0aabb\hat{b} &\vdash_{(1)} Aq_1abb\hat{b} \vdash_{(2)} Aaq_1b\hat{b} \vdash_{(4)} Aq_2aB\hat{b} \vdash_{(5)} q_2AaB\hat{b} \\ &\vdash_{(7)} Aq_0aB\hat{b} \vdash_{(1)} AAq_1B\hat{b} \vdash_{(3)} AABq_1\hat{b} \vdash_{(4a)} AAq_2B\hat{b} \\ &\vdash_{(6)} Aq_2AB\hat{b} \vdash_{(7)} AAq_0B\hat{b} \vdash_{(8)} AABq_3\hat{b} \vdash_{(10')} AABq_4\hat{b} \end{aligned}$$

akzeptiert und das Wort ab wird durch die Rechnung

$$q_0a\hat{b} \vdash_{(1)} Aq_1\hat{b} \vdash_{(4a)} q_2A\hat{b} \vdash_{(7)} Aq_0\hat{B} \vdash_{(8a)} Aq_4\hat{B}$$

akzeptiert. ◁

Der DLBA M' für die Sprache $A = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus dem letzten Beispiel lässt sich leicht in einen DLBA für die Sprache $B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ transformieren (siehe Übungen), d.h. $B \in \mathbf{DCSL} \setminus \mathbf{CFL}$. Die Inklusion von CFL in DCSL wird in den Übungen gezeigt.

Als nächstes beweisen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

Satz 121. $\mathbf{CSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}.$

Eine einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass 1-NTMs genau die Sprachen vom Typ 0 akzeptieren (siehe Übungen).

Beweis. Wir zeigen zuerst die Inklusion von links nach rechts. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $\hat{x} = x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n$ mit $n > 0$:	
1	Markiere das Eingabezeichen x_1 mittels $\tilde{x}_1$ (bzw. $\hat{x}_1$ mittels $\tilde{\hat{x}}_1$)
2	Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel $\alpha \rightarrow \beta$ aus P
3	Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4	Ersetze die ersten $ \alpha $ Zeichen von β durch α
5	Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war, markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6	Verschiebe die Zeichen rechts von β um $ \beta - \alpha $ Positionen nach links und überschreibe die frei werdenden Felder mit Blanks
7	Falls das Band abgesehen von Blanks nur das (doppelt markierte) Startsymbol enthält, halte in einem Endzustand
8	Gehe zurück zu Schritt 2

Nun ist leicht zu sehen, dass M wegen $|\beta| \geq |\alpha|$ tatsächlich ein LBA ist. M akzeptiert eine Eingabe x , falls es gelingt, eine Ableitung für x in G zu finden (in umgekehrter Reihenfolge). Da sich genau für die Wörter in $L(G)$ eine Ableitung finden lässt, folgt $L(M) = L(G)$.

Für den Beweis der umgekehrten Inklusion sei ein LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ gegeben (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$). Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma \\ &= \{S, A, (qc, a), (c, a) \mid q \in Z, c \in \Gamma, a \in \Sigma\}, \end{aligned}$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

P :	$S \rightarrow A(\hat{a}, a), (q_0 \hat{a}, a)$	(S) „Startregeln“
	$A \rightarrow A(a, a), (q_0 a, a)$	(A) „A-Regeln“
	$(c, a) \rightarrow a$	(F) „Finale Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow a,$ falls $q \in E$	(E) „E-Regeln“
	$(qc, a) \rightarrow (q'c', a),$ falls $qc \rightarrow_M q'c'N$	(N) „N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \rightarrow (c', a)(q'd, b),$ falls $qc \rightarrow_M q'c'R$	(R) „R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \rightarrow (q'd, a)(c', b),$ falls $qc \rightarrow_M q'c'L$	(L) „L-Regeln“

Durch Induktion über m lässt sich nun leicht für alle $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$ und $q \in Z$ die folgende Äquivalenz beweisen:

$$q_0 x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \dots a_{i-1} q a_i \dots a_n \iff (q_0 x_1, x_1) \dots (\hat{x}_n, x_n) \xRightarrow{(N, R, L)}^m (a_1, x_1) \dots (q a_i, x_i) \dots (a_n, x_n)$$

Ist also $q_0 x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \dots a_{i-1} q a_i \dots a_n$ mit $q \in E$ eine akzeptierende Rechnung von $M(x_1 \dots x_{n-1} \hat{x}_n)$, so folgt im Fall $n = 1$

$$S \xRightarrow{(S)} (q_0 \hat{x}_1, x_1) \xRightarrow{(N)}^m (q a_1, x_1) \xRightarrow{(E)} x_1$$

und im Fall $n \geq 2$

$$\begin{aligned} S &\xRightarrow{(S, A)}^n (q_0 x_1, x_1)(x_2, x_2) \dots (x_{n-1}, x_{n-1})(\hat{x}_n, x_n) \\ &\xRightarrow{(N, L, R)}^m (a_1, x_1) \dots (a_{i-1}, x_{i-1})(q a_i, x_i) \dots (a_n, x_n) \\ &\xRightarrow{(F, E)}^n x_1 \dots x_n \end{aligned}$$

Die Inklusion $L(G) \subseteq L(M)$ folgt analog. ■

Beispiel 122. Betrachte den LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ und $E = \{q_4\}$, sowie

$$\begin{array}{lll} \delta: q_0 a \rightarrow q_1 A R & q_1 \hat{b} \rightarrow q_2 \hat{B} L & q_0 B \rightarrow q_3 B R \\ q_1 a \rightarrow q_1 a R & q_2 a \rightarrow q_2 a L & q_0 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B} N \\ q_1 B \rightarrow q_1 B R & q_2 B \rightarrow q_2 B L & q_3 B \rightarrow q_3 B R \\ q_1 b \rightarrow q_2 B L & q_2 A \rightarrow q_0 A R & q_3 \hat{B} \rightarrow q_4 \hat{B} N \end{array}$$

Die zugehörige kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ enthält dann neben den Start- und A-Regeln

$$S \rightarrow A(\hat{a}, a), A(\hat{b}, b), (q_0\hat{a}, a), (q_0\hat{b}, b) \quad (S_1-S_4)$$

$$A \rightarrow A(a, a), A(b, b), (q_0a, a), (q_0b, b) \quad (A_1-A_4)$$

für jedes Zeichen $c \in \Gamma$ folgende F- und E-Regeln (wegen $E = \{q_4\}$):

$$(c, a) \rightarrow a \text{ und } (c, b) \rightarrow b \quad (F_1-F_{16})$$

$$(q_4c, a) \rightarrow a \text{ und } (q_4c, b) \rightarrow b \quad (E_1-E_{16})$$

Daneben enthält P beispielsweise für die Anweisung $q_3\hat{B} \rightarrow q_4\hat{B}N$ folgende zwei N-Regeln:

$$(q_3\hat{B}, a) \rightarrow (q_4\hat{B}, a), \quad (q_3\hat{B}, b) \rightarrow (q_4\hat{B}, b).$$

Für die Anweisung $q_1b \rightarrow q_2BL$ kommen für jedes $d \in \Gamma$ die vier L-Regeln

$$(d, a)(q_1b, a) \rightarrow (q_2d, a)(B, a), \quad (d, b)(q_1b, a) \rightarrow (q_2d, b)(B, a)$$

$$(d, a)(q_1b, b) \rightarrow (q_2d, a)(B, b), \quad (d, b)(q_1b, b) \rightarrow (q_2d, b)(B, b)$$

zu P hinzu und die Anweisung $q_0a \rightarrow q_1AR$ bewirkt für jedes $d \in \Gamma$ die Hinzunahme folgender vier R-Regeln:

$$(q_0a, a)(d, a) \rightarrow (A, a)(q_1d, a), \quad (q_0a, a)(d, b) \rightarrow (A, a)(q_1d, b)$$

$$(q_0a, b)(d, a) \rightarrow (A, b)(q_1d, a), \quad (q_0a, b)(d, b) \rightarrow (A, b)(q_1d, b)$$

◁

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL, CFL, DCSL, CSL und RE. In der Vorlesung Komplexitätstheorie wird gezeigt, dass die Klasse CSL unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Klasse RE nicht unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Die übrigen Abschlusseigenschaften in folgender Tabelle werden in den Übungen bewiesen.

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja
DCSL	ja	ja	ja	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
RE	ja	ja	nein	ja	ja

5 Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Klasse RE der rekursiv aufzählbaren Sprachen, die identisch mit den Typ-0 Sprachen sind. Wir werden eine Reihe von Charakterisierungen für diese Klasse mittels Turingmaschinen beweisen, wodurch auch die Namensgebung (rekursiv aufzählbar) verständlich wird. Eine wichtige Teilklasse von RE bildet die Klasse REC der entscheidbaren (oder rekursiven) Sprachen, in der bereits alle kontextsensitiven Sprachen enthalten sind.

Definition 123.

- a) Eine NTM M **hält** bei Eingabe x (kurz: $M(x) = \downarrow$ oder $M(x) \downarrow$), falls alle Rechnungen von $M(x)$ nach endlich vielen Schritten halten. Falls $M(x)$ nicht hält, schreiben wir auch kurz $M(x) = \uparrow$ oder $M(x) \uparrow$.
- b) Eine NTM M **entscheidet** eine Eingabe x , falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht.
- c) Eine Sprache heißt **entscheidbar**, falls sie von einer DTM M erkannt wird, die alle Eingaben entscheidet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\text{REC} = \{L(M) \mid \text{die DTM } M \text{ entscheidet jede Eingabe}\}.$$

- d) Jede von einer DTM M akzeptierte Sprache heißt **semi-entscheidbar**.

Bemerkung 124.

- Die von einer DTM M akzeptierte Sprache $L(M)$ wird als **semi-entscheidbar** bezeichnet, da M zwar alle (positiven) Eingaben

$x \in L$ entscheidet, aber möglicherweise nicht alle (negativen) Eingaben $x \in \bar{L}$.

- Wir werden später sehen, dass $\text{RE} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$ ist.

Wir wenden uns nun der Berechnung von Funktionen zu.

Definition 125. Eine k -DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ **berechnet** eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

mit $u_k = f(x)$ hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration). Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$. f heißt **Turing-berechenbar** (oder einfach **berechenbar**), falls es eine k -DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.

Um eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ zu berechnen, muss M also bei jeder Eingabe x den Funktionswert $f(x)$ auf das k -te Band schreiben und danach halten. Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch **rekursiv** (engl. recursive) genannt.

Wie der nächste Satz zeigt, lässt sich jedes Entscheidungsproblem auf ein funktionales Problem zurückführen.

Definition 126. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist die **charakteristische Funktion** $\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ wie folgt definiert:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

In den Übungen wird gezeigt, dass eine Sprache A genau dann entscheidbar ist, wenn χ_A berechenbar (also rekursiv) ist. Dies erklärt die Bezeichnung REC für die Klasse der entscheidbaren Sprachen. Dort

wird auch gezeigt, dass CSL echt in REC enthalten ist. Beispiele für interessante semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind, werden wir noch kennenlernen. Somit gilt

$$\text{REG} \subsetneq \text{DCFL} \subsetneq \text{CFL} \subsetneq \text{DCSL} \subseteq \text{CSL} \subsetneq \text{REC} \subsetneq \text{RE}.$$

Falls eine DTM M nicht bei allen Eingaben hält, ist der Funktionswert der von ihr berechneten Funktion für manche Eingaben undefiniert, d.h. M berechnet eine partielle Funktion.

Definition 127.

- a) Eine **partielle Funktion** hat die Form $f : A \rightarrow B \cup \{\uparrow\}$.
- b) Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist **undefiniert**.
- c) Der **Definitionsbereich** (engl. domain) von f ist

$$\text{dom}(f) = \{x \in A \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- d) Das **Bild** (engl. image) von f ist

$$\text{img}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{dom}(f)\}.$$

- e) f heißt **total**, falls $\text{dom}(f) = A$ ist.
- f) Eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$ heißt **berechenbar**, falls es eine k -DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt (d.h. $M(x)$ gibt für alle $x \in \text{dom}(f)$ das Wort $f(x)$ aus und hält im Fall $x \notin \text{dom}(f)$ nicht).

Jede DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet also eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$. Die Menge $\text{dom}(f) = \{x \in \Sigma^* \mid M(x) \downarrow\}$ aller Eingaben, bei denen M hält, bezeichnen wir mit **dom**(M).

Wir fassen die berechenbaren Funktionen und berechenbaren partiellen Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$$\text{FREC} = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare (totale) Funktion}\},$$

$$\text{FREC}_p = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare partielle Funktion}\}.$$

Dann gilt $\text{FREC} \subsetneq \text{FREC}_p$.

Beispiel 128. Bezeichne x^+ den **lexikografischen Nachfolger** von $x \in \Sigma^*$. Für $\Sigma = \{0, 1\}$ ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

x	ε	0	1	00	01	10	11	000	...
x^+	0	1	00	01	10	11	000	001	...

Betrachte die auf Σ^* definierten partiellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ f_2(x) &= x, \\ f_3(x) &= x^+ \end{aligned} \quad \text{und} \quad f_4(x) = \begin{cases} \uparrow, & x = \varepsilon, \\ y, & x = y^+. \end{cases}$$

Da diese vier partiellen Funktionen alle berechenbar sind, gehören die totalen Funktionen f_1, f_2, f_3 zu FREC , während $f_4 \in \text{FREC}_p$ ist. $\triangleleft$

Ähnlich wie sich die Entscheidbarkeit einer Sprache A durch die Berechenbarkeit von χ_A charakterisieren lässt, lässt sich auch die Semi-Entscheidbarkeit von A charakterisieren.

Definition 129. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

- Die **partielle charakteristische Funktion von A** ist die partielle Funktion $\hat{\chi}_A : \Sigma^* \rightarrow \{1\} \cup \{\uparrow\}$ mit

$$\hat{\chi}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \uparrow, & x \notin A \end{cases}$$

- A heißt **rekursiv aufzählbar**, falls $A = \emptyset$ oder das Bild $\text{img}(f)$ einer (totalen) berechenbaren Funktion $f : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ ist.

Satz 130. Folgende Eigenschaften sind für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ äquivalent:

- (i) A ist semi-entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert),
- (ii) A wird von einer 1-DTM akzeptiert,
- (iii) A ist vom Typ 0,
- (iv) A wird von einer NTM akzeptiert,
- (v) A ist rek. aufzählbar (d.h. $A = \emptyset$ oder $A = \text{img}(f)$ für eine Fkt. $f \in \text{FREC}$),
- (vi) $\hat{\chi}_A$ ist berechenbar (d.h. $\hat{\chi}_A \in \text{FREC}_p$),
- (vii) es gibt eine DTM M mit $A = \text{dom}(M)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k -DTM, die A akzeptiert. Wir konstruieren eine 1-DTM $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, E)$ mit $L(M') = A$. M' simuliert M , indem sie jede Konfiguration K von M der Form

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & a & b & c & d & \cdots \\ & & & \uparrow & & \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & e & f & g & h & \cdots \\ & \uparrow & & & & \end{array}$$

durch eine Konfiguration K' folgender Form nachbildet:

$$\cdots \left| \begin{pmatrix} q \\ \vdots \\ \hat{e} \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ f \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \vdots \\ g \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ h \end{pmatrix} \right| \cdots$$

Das heißt, M' arbeitet mit dem Alphabet

$$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Gamma\})^k$$

und erzeugt bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ zuerst die der Startkonfiguration $K_x = (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon)$ von M bei Eingabe x entsprechende Konfiguration

$$K'_x = q'_0 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\sqcup} \\ \vdots \\ \hat{\sqcup} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix}.$$

Dann simuliert M' jeweils einen Schritt von M durch folgende Sequenz von Rechenschritten:

Zuerst geht M' solange nach rechts, bis sie alle mit $\hat{\cdot}$ markierten Zeichen (z.B. $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$) gefunden hat. Diese Zeichen speichert M' zusammen mit dem aktuellen Zustand q von M in ihrem Zustand. Anschließend geht M' wieder nach links und realisiert dabei die durch $\delta(q, a_1, \dots, a_k)$ vorgegebene Anweisung von M .

Sobald M in einen Endzustand übergeht, wechselt M' ebenfalls in einen Endzustand und hält. Nun ist leicht zu sehen, dass $L(M') = L(M)$ ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv): Diese beiden Implikationen lassen sich ganz ähnlich wie die Charakterisierung der Typ-1 Sprachen durch LBAs zeigen (siehe Übungen).

(iv) $\Rightarrow$ (v): Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k -NTM, die eine Sprache $A \neq \emptyset$ akzeptiert. Kodieren wir eine Konfiguration $K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$ von M durch das Wort

$$\text{code}(K) = \#q\#u_1\#a_1\#v_1\#\dots\#u_k\#a_k\#v_k\#$$

über dem Alphabet $\tilde{\Gamma} = Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$ und eine Rechnung $K_0 \vdash \dots \vdash K_t$ durch das Wort $\text{code}(K_0) \dots \text{code}(K_t)$, so lassen sich die Wörter von A durch folgende Funktion $f: \tilde{\Gamma}^* \rightarrow \Sigma^*$ aufzählen (dabei ist x_0 ein beliebiges Wort in A):

$$f(w) = \begin{cases} x, & w \text{ kodiert eine Rechnung } K_0 \vdash \dots \vdash K_t \text{ von } \\ & M \text{ mit } K_0 = K_x \text{ und } K_t \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f berechenbar ist, ist $A = \text{img}(f)$ rekursiv aufzählbar.

- (v) $\Rightarrow$ (vi): Sei M eine DTM, die eine Fkt. $f : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $A = \text{img}(f)$ berechnet. Dann wird $\hat{\chi}_A$ von der DTM M' berechnet, die bei Eingabe x der Reihe nach für alle $w \in \Gamma^*$ das Wort $f(w)$ berechnet und 1 ausgibt, sobald $f(w) = x$ ist.
- (vi) $\Rightarrow$ (vii): Sei M eine DTM, die $\hat{\chi}_A$ berechnet. Da $\text{dom}(\hat{\chi}_A) = A$ ist, folgt $A = \text{dom}(M)$.
- (vii) $\Rightarrow$ (i): Sei $A = \text{dom}(M)$ für eine DTM M . Dann gilt $A = L(M')$ für die DTM M' , die M simuliert und genau dann in einen Endzustand übergeht, wenn M hält. $\square$

Aus manchen dieser Charakterisierungen der semi-entscheidbaren Sprachen lassen sich entsprechende Charakterisierungen der entscheidbaren Sprachen gewinnen.

Satz 131. *Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

1. A ist entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert, die alle Eingaben entscheidet),
2. die charakteristische Funktion χ_A von A ist berechenbar,
3. A wird von einer 1-DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
4. A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
5. A und $\bar{A}$ sind semi-entscheidbar.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten vier Bedingungen wird in den Übungen gezeigt. Hier zeigen wir nur die Äquivalenz dieser vier Bedingungen zur fünften.

Falls A entscheidbar ist, ist mit χ_A auch $\chi_{\bar{A}}$ berechenbar, d.h. A und $\bar{A}$ sind entscheidbar und damit auch semi-entscheidbar.

Für die Rückrichtung seien M_A und $M_{\bar{A}}$ DTMs, die die partiellen charakteristischen Funktionen $\hat{\chi}_A$ und $\hat{\chi}_{\bar{A}}$ berechnen. Betrachte folgende DTM M , die abwechselnd M_A und $M_{\bar{A}}$ für jeweils einen weiteren Rechenschritt simuliert und

- in einem Endzustand hält, sobald $M_A(x)$ nach t Schritten hält,

- in einem Nichtendzustand hält, sobald $M_{\bar{A}}(x)$ nach t Schritten hält.

Da jede Eingabe x entweder in $\text{dom}(\hat{\chi}_A) = A$ oder in $\text{dom}(\hat{\chi}_{\bar{A}}) = \bar{A}$ enthalten ist, hält M bei allen Eingaben. Da zudem $L(M) = A$ ist, folgt $A \in \text{REC}$. $\blacksquare$

5.1 Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Eine für die Programmverifikation sehr wichtige Fragestellung ist, ob ein gegebenes Programm bei allen Eingaben nach endlich vielen Rechenschritten stoppt. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass es zur Lösung dieses Problems keinen Algorithmus gibt, nicht einmal dann, wenn wir die Eingabe fixieren. Damit wir einer Turingmaschine eine andere Turingmaschine als Eingabe vorlegen können, müssen wir eine geeignete Kodierung von Turingmaschinen vereinbaren (diese wird auch Gödelisierung genannt).

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine 1-DTM mit Zustandsmenge $Z = \{q_0, \dots, q_m\}$ (o.B.d.A. sei $E = \{q_m\}$) und Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Das Arbeitsalphabet sei $\Gamma = \{a_0, \dots, a_l\}$, wobei wir o.B.d.A. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_2 = \sqcup$ annehmen. Dann können wir jede Anweisung der Form $q_i a_j \rightarrow q_{i'} a_{j'} D$ durch das Wort

$$\# \text{bin}(i) \# \text{bin}(j) \# \text{bin}(i') \# \text{bin}(j') \# b_D \#$$

kodieren. Dabei ist $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n und $b_N = 0$, $b_L = 1$, sowie $b_R = 10$. M lässt sich nun als ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$ kodieren, indem wir die Anweisungen von M in kodierter Form auflisten. Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 11$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung w_M von M . Die Binärzahl w_M wird auch die **Gödel-Nummer** von M genannt (tatsächlich kodierte Kurt Gödel Turingmaschinen durch natürliche Zahlen und nicht durch Binärstrings). Die Maschine M_w ist durch die

Angabe von w bis auf die Benennung ihrer Zustände und Arbeitszeichen eindeutig bestimmt. Ganz analog lassen sich auch DTMs mit einer beliebigen Anzahl von Bändern (sowie NTMs, Konfigurationen oder Rechnungen von TMs) kodieren.

Umgekehrt können wir jedem Binärstring $w \in \{0,1\}^*$ eine DTM M_w wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls eine DTM } M \text{ mit } w_M = w \text{ existiert,} \\ M_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist M_0 eine beliebige DTM.

Definition 132.

a) Das **Halteproblem** ist die Sprache

$$H = \left\{ w \# x \mid \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und die DTM} \\ M_w \text{ hält bei Eingabe } x \end{array} \right\}$$

b) Das **spezielle Halteproblem** ist

$$K = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } w \end{array} \right\}$$

Der Werteverlauf der charakteristischen Funktion χ_K von K stimmt also mit der Diagonalen der als Matrix dargestellten charakteristischen Funktion χ_H von H überein.

Satz 133. $K \in \text{RE} \setminus \text{co-RE}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $K \in \text{RE}$. Sei w_0 die Kodierung einer DTM,

die bei jeder Eingabe (sofort) hält und betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \text{ ist Kodierung einer haltenden Berechnung einer} \\ & \text{DTM } M_w \text{ bei Eingabe } w, \\ w_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f berechenbar und $\text{img}(f) = K$ ist, folgt $K \in \text{RE}$. Um zu zeigen, dass $\bar{K}$ nicht semi-entscheidbar ist, führen wir die Annahme $\bar{K} \in \text{RE}$ auf einen Widerspruch.

Wir erklären zuerst die Beweisidee. Sei $B = (b_{ij})$ die durch $b_{ij} = \chi_H(w_i \# w_j) \in \{0,1\}$ definierte Binärmatrix. Dann kann keine Zeile $b_{i1}b_{i2}\dots$ von B mit der invertierten Diagonalen $\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}\dots$ von B übereinstimmen, da sonst $b_{ii} = \bar{b}_{ii}$ sein müsste. Da aber die i -te Zeile von B wegen

$$b_{ij} = \chi_H(w_i \# w_j) = \chi_{\text{dom}(M_{w_i})}(w_j)$$

die Sprache $\text{dom}(M_{w_i}) = \{w_j \mid M_{w_i}(w_j) \downarrow\}$ und die invertierte Diagonale wegen

$$\bar{b}_{ii} = \chi_{\bar{H}(w_i \# w_i)} = \chi_{\bar{K}}(w_i)$$

die Sprache $\bar{K}$ kodiert, folgt $\bar{K} \neq \text{dom}(M_{w_i})$ für alle $i \geq 1$. Dies impliziert $\bar{K} \notin \text{RE}$, da die Zeilen von B wegen

$$\{\text{dom}(M_{w_i}) \mid i \geq 1\} = \{A \subseteq \{0,1\}^* \mid A \in \text{RE}\}$$

alle semi-entscheidbaren Binärsprachen kodieren. Nehmen wir also an,

$$\bar{K} = \{w \mid M_w(w) \uparrow\} \quad (*)$$

wäre semi-entscheidbar. Dann existiert eine DTM M_{w_i} mit

$$\text{dom}(M_{w_i}) = \bar{K} \quad (**)$$

Dies führt jedoch auf einen Widerspruch:

$$w_i \in \bar{K} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} M_{w_i}(w_i) \uparrow \Leftrightarrow w_i \notin \text{dom}(M_{w_i}) \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} w_i \notin \bar{K} \quad \blacksquare$$

χ_H	w_1	w_2	w_3	$\dots$
w_1	1	1	0	$\dots$
w_2	0	0	1	$\dots$
w_3	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_K	
w_1	1
w_2	0
w_3	1
$\vdots$	$\ddots$

χ_H	w_1	w_2	w_3	$\dots$
w_1	1	1	0	$\dots$
w_2	0	0	1	$\dots$
w_3	1	1	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
w_i	0	1	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Die Methode in obigem Beweis wird als **Diagonalisierung** bezeichnet. Mit dieser Beweistechnik lässt sich auch eine Sprache in $\text{REC} \setminus \text{CSL}$ definieren (siehe Übungen). Da K in RE , aber weder in co-RE noch in REC enthalten ist, erhalten wir folgende Separierungen.

Korollar 134. $\text{REC} \subsetneq \text{RE} \neq \text{co-RE}$.

Definition 135.

- a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt auf $B \subseteq \Gamma^*$ **reduzierbar** (kurz: $A \leq B$), falls eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ ex., so dass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

- b) Eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ heißt **unter $\leq$ abgeschlossen**, wenn für alle Sprachen A, B gilt:

$$A \leq B \wedge B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

Beispiel 136. Es gilt $K \leq H$ mittels $f : w \mapsto w\#w$, da für alle $w \in \{0, 1\}^*$ gilt:

$$\begin{aligned} w \in K &\Leftrightarrow M_w \text{ ist eine DTM, die bei Eingabe } w \text{ hält} \\ &\Leftrightarrow w\#w \in H. \end{aligned}$$

◁

Satz 137. Die Klasse REC ist unter $\leq$ abgeschlossen.

Beweis. Gelte $A \leq B$ mittels f und sei M eine DTM, die χ_B berechnet. Betrachte folgende DTM M' :

- M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
- simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.

Wegen

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

folgt

$$M'(x) = M(f(x)) = \chi_B(f(x)) = \chi_A(x).$$

Also berechnet M' die Funktion χ_A , d.h. $A \in \text{REC}$. ■

Der Abschluss von RE unter $\leq$ folgt analog (siehe Übungen).

Korollar 138.

1. $A \leq B \wedge A \notin \text{REC} \Rightarrow B \notin \text{REC},$
2. $A \leq B \wedge A \notin \text{RE} \Rightarrow B \notin \text{RE}.$

Beweis. Aus der Annahme, dass B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, folgt wegen $A \leq B$, dass dies auch auf A zutrifft (Widerspruch). ■

Wegen $K \leq H$ überträgt sich die Unentscheidbarkeit von K auf H .

Korollar 139. $H \notin \text{REC}$.

Definition 140.

- a) Eine Sprache B heißt **hart** für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: **$\mathcal{C}$ -hart** oder **$\mathcal{C}$ -schwer**), falls jede Sprache $A \in \mathcal{C}$ auf B reduzierbar ist:

$$\forall A \in \mathcal{C} : A \leq B.$$

- b) Eine $\mathcal{C}$ -harte Sprache B , die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt **$\mathcal{C}$ -vollständig**.

Beispiel 141. Das Halteproblem H ist RE -hart, da sich jede semi-entscheidbare Sprache A auf H reduzieren lässt. Die Reduktion $A \leq H$ leistet beispielsweise die Funktion $x \mapsto w\#\text{bin}(x)$, wobei w die Kodierung einer DTM M_w mit $\text{dom}(M_w) = \{\text{bin}(x) \mid x \in A\}$ ist. ▷

Da RE unentscheidbare Sprachen wie z.B. K enthält und somit K auf jede RE -vollständige Sprache reduzierbar ist, sind alle RE -vollständigen Sprachen unentscheidbar.

Definition 142. Das **Halteproblem bei leerem Band** ist die Sprache

$$H_0 = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \text{ hält} \\ \text{bei Eingabe } \varepsilon \end{array} \right\}$$

χ_{H_0}	$w_1 (= \varepsilon)$
w_1	1
w_2	1
w_3	0
$\vdots$	$\vdots$

Satz 143. H_0 ist RE-vollständig und somit unentscheidbar.

Beweis. Da die Funktion $w \mapsto w\#\varepsilon$ die Sprache H_0 auf H reduziert und da $H \in \text{RE}$ ist, folgt $H_0 \in \text{RE}$.

Für den Beweis, dass H_0 RE-hart ist, sei $A \in \text{RE}$ beliebig. Da jede Sprache $A \in \text{RE}$ auf die Binärsprache $A' = \{\text{bin}(x) \mid x \in A\} \in \text{RE}$ reduzierbar ist und die Reduktionsrelation $\leq$ transitiv ist (s. Übungen), können wir o.B.d.A. $A \subseteq \{0,1\}^*$ annehmen. Sei M_A eine DTM, die $\hat{\chi}_A$ berechnet. Um A auf H_0 zu reduzieren, transformieren wir ein Wort x in die Kodierung w_x einer DTM, die (unabhängig von ihrer Eingabe) $M_A(x)$ simuliert. Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow M_A(x) \downarrow \Leftrightarrow M_{w_x}(\varepsilon) \downarrow \Leftrightarrow w_x \in H_0.$$

Da zudem die Funktion $x \mapsto w_x$ total und berechenbar ist, folgt $A \leq H_0$. ■

Mit demselben Beweis folgt, dass alle Spalten und auch die Diagonale der Matrix $B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \chi_H(w_i\#w_j)$ RE-vollständige Sprachen repräsentieren. Insbesondere ist also auch K RE-vollständig.

6 Komplexität von algorithmischen Problemen

6.1 Zeitkomplexität

Die Laufzeit $\text{time}_M(x)$ einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt.

Definition 144.

a) Die **Laufzeit** einer NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$\text{time}_M(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

wobei $\sup \mathbb{N} = \infty$ ist.

b) Sei $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist M **$t(n)$ -zeitbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:

$$\text{time}_M(x) \leq t(|x|)$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität).

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden Komplexitätsklassen zusammen.

Definition 145.

a) Die in deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\text{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}$$

b) Die in nichtdeterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathbf{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}$$

c) Die in deterministischer Zeit $t(n)$ berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse

$$\mathbf{FTIME}(t(n)) = \{f \mid \exists t(n)\text{-zeitb. DTM } M, \text{ die } f \text{ berechnet}\}$$

Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\mathbf{LINTIME} = \bigcup_{c \geq 1} \mathbf{DTIME}(cn + c) \quad \text{„Linearzeit“}$$

$$\mathbf{P} = \bigcup_{c \geq 1} \mathbf{DTIME}(n^c + c) \quad \text{„Polynomialzeit“}$$

$$\mathbf{E} = \bigcup_{c \geq 1} \mathbf{DTIME}(2^{cn+c}) \quad \text{„Lineare Exponentialzeit“}$$

$$\mathbf{EXP} = \bigcup_{c \geq 1} \mathbf{DTIME}(2^{n^c+c}) \quad \text{„Exponentialzeit“}$$

Die nichtdeterministischen Klassen $\mathbf{NLINTIME}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{NE}$, $\mathbf{NEXP}$ und die Funktionenklassen $\mathbf{FP}$, $\mathbf{FE}$, $\mathbf{FEXP}$ sind analog definiert.

Für eine Funktionenklasse $\mathcal{F}$ sei $\mathbf{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t \in \mathcal{F}} \mathbf{DTIME}(t(n))$ (die Klassen $\mathbf{NTIME}(\mathcal{F})$ und $\mathbf{FTIME}(\mathcal{F})$ seien analog definiert).

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition 146. Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$. Wir schreiben $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls es Zahlen n_0 und c gibt mit

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Die Bedeutung der Aussage $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ist, dass f „nicht wesentlich schneller“ als g wächst. Formal bezeichnet der Term $\mathcal{O}(g(n))$ die

Klasse aller Funktionen f , die obige Bedingung erfüllen. Die Gleichung $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine Element-Beziehung $f \in \mathcal{O}(g(n))$ aus. $\mathcal{O}$ -Terme können auch auf der linken Seite vorkommen. In diesem Fall wird eine Inklusionsbeziehung ausgedrückt. So steht $n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ für die Aussage $\{n^2 + f \mid f \in \mathcal{O}(n)\} \subseteq \mathcal{O}(n^2)$.

Beispiel 147.

- $7 \log(n) + n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist *richtig*
- $7 \log(n)n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist *falsch*
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist *richtig*
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist *falsch* (siehe Übungen)

◁

Unter Benutzung der $\mathcal{O}$ -Notation lassen sich die wichtigsten Komplexitätsklassen wie folgt definieren: $\mathbf{L} = \mathbf{DSpace}(\mathcal{O}(\log n))$, $\mathbf{LINTIME} = \mathbf{DTIME}(\mathcal{O}(n))$, $\mathbf{P} = \mathbf{DTIME}(n^{\mathcal{O}(1)})$, $\mathbf{E} = \mathbf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)})$ und $\mathbf{EXP} = \mathbf{DTIME}(2^{n^{\mathcal{O}(1)}})$ etc.

6.2 NP-Vollständigkeit

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben (siehe Satz 131), sind NTMs nicht mächtiger als DTMs, d.h. jede NTM kann von einer DTM simuliert werden. Die Frage, wieviel Zeit eine DTM zur Simulation einer NTM benötigt, ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik. Wegen $\mathbf{NTIME}(t) \subseteq \mathbf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(t)})$ erhöht sich die Laufzeit im schlimmsten Fall exponentiell. Insbesondere die Klasse $\mathbf{NP}$ enthält viele für die Praxis überaus wichtige Probleme, für die kein Polynomialzeitalgorithmus bekannt ist. Da jedoch nur Probleme in $\mathbf{P}$ als effizient lösbar gelten, hat das so genannte **P-NP-Problem**, also die Frage, ob alle $\mathbf{NP}$ -Probleme effizient lösbar sind, eine immense praktische Bedeutung.

Definition 148. Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen.

- a) A ist auf B in **Polynomialzeit** **reduzierbar** ($A \leq^p B$), falls eine Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ in FP existiert mit

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

- b) A heißt **$\leq^p$ -hart** für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: **$\mathcal{C}$ -hart** oder **$\mathcal{C}$ -schwer**), falls gilt:

$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq^p A.$$

- c) Eine $\mathcal{C}$ -harte Sprache, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt **$\mathcal{C}$ -vollständig**. Die Klasse aller NP-vollständigen Sprachen bezeichnen wir mit **NP**.

Aus $A \leq^p B$ folgt offenbar $A \leq B$ und wie die Relation $\leq$ ist auch $\leq^p$ reflexiv und transitiv (s. Übungen). In diesem Kapitel verlangen wir also von einer $\mathcal{C}$ -vollständigen Sprache A , dass jede Sprache $L \in \mathcal{C}$ auf A in Polynomialzeit reduzierbar ist. Es ist leicht zu sehen, dass alle im letzten Kapitel als RE-vollständig nachgewiesenen Sprachen (wie z.B. K, H, H_0 , PCP etc.) sogar $\leq^p$ -vollständig für RE sind.

Satz 149. Die Klassen P und NP sind unter $\leq^p$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $B \in P$ und gelte $A \leq^p B$ mittels einer Funktion $f \in FP$. Seien M und T DTMs mit $L(M) = B$ und $T(x) = f(x)$. Weiter seien p und q polynomielle Zeitschranken für M und T . Betrachte die DTM M' , die bei Eingabe x zuerst T simuliert, um $f(x)$ zu berechnen, und danach M bei Eingabe $f(x)$ simuliert. Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M').$$

Also ist $L(M') = A$ und wegen

$$time_{M'}(x) \leq time_T(x) + time_M(f(x)) \leq q(|x|) + p(q(|x|))$$

ist M' polynomiell zeitbeschränkt und somit A in P . Den Abschluss von NP unter $\leq^p$ zeigt man vollkommen analog. ■

Satz 150.

- (i) $A \leq^p B$ und A ist NP-schwer $\Rightarrow B$ ist NP-schwer.
- (ii) $A \leq^p B$, A ist NP-schwer und $B \in NP \Rightarrow B \in NPC$.
- (iii) $NPC \cap P \neq \emptyset \Rightarrow P = NP$.

Beweis.

- (i) Sei $L \in NP$ beliebig. Da A NP-schwer ist, folgt $L \leq^p A$. Da zudem $A \leq^p B$ gilt und $\leq^p$ transitiv ist, folgt $L \leq^p B$.
- (ii) Klar, da mit (i) folgt, dass B NP-schwer und B nach Voraussetzung in NP ist.
- (iii) Sei $A \in P$ eine NP-vollständige Sprache und sei $L \in NP$ beliebig. Dann folgt $L \leq^p A$ und da P unter $\leq^p$ abgeschlossen ist, folgt $L \in P$. ■

6.3 Platzkomplexität

Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch von NTMs. Intuitiv ist dies die Anzahl aller während einer Rechnung benutzten Bandfelder. Wollen wir auch sublinearen Platz sinnvoll definieren, so dürfen wir hierbei das Eingabeband offensichtlich nicht berücksichtigen. Um sicherzustellen, dass eine NTM M das Eingabeband nicht als Speicher benutzt, verlangen wir, dass M die Felder auf dem Eingabeband nicht verändert und sich nicht mehr als ein Feld von der Eingabe entfernt.

Definition 151. Eine NTM M heißt **Offline-NTM** (oder NTM mit **Eingabeband**), falls für jede von M bei Eingabe x erreichbare Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$$

gilt, dass $u_1 a_1 v_1$ ein Teilwort von $\sqcup x \sqcup$ ist.

Definition 152. Der **Platzverbrauch** einer Offline-NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$space_M(x) = \sup \left\{ s \geq 1 \left| \begin{array}{l} \exists K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \\ \text{mit } K_x \vdash^* K \text{ und } s = \sum_{i=2}^k |u_i a_i v_i| \end{array} \right. \right\}.$$

Sei $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist M **$s(n)$ -platzbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:

$$space_M(x) \leq s(|x|) \text{ und } time_M(x) < \infty.$$

Wir fassen alle Sprachen, die in einer vorgegebenen Platzschranke $s(n)$ entscheidbar sind, in folgenden **Platzkomplexitätsklassen** zusammen.

Definition 153. Die auf deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\mathbf{DSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. Offline-DTM}\}.$$

Die auf nichtdeterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\mathbf{NSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. Offline-NTM}\}.$$

Die wichtigsten deterministischen Platzkomplexitätsklassen sind

$$\mathbf{L} = \mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(\log n)) \quad \text{„Logarithmischer Platz“}$$

$$\mathbf{LINSPEC} = \mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(n)) \quad \text{„Linearer Platz“}$$

$$\mathbf{PSPACE} = \mathbf{DSPACE}(n^{\mathcal{O}(1)}) \quad \text{„Polynomieller Platz“}$$

Die nichtdeterministischen Klassen **NL**, **NLINSPEC** und **NPSPACE** sind analog definiert.

Zwischen den verschiedenen Zeit- und Platzklassen bestehen die folgenden elementaren Inklusionsbeziehungen. Für jede Funktion $t(n) \geq n+2$ gilt

$$\mathbf{DTIME}(t) \subseteq \mathbf{NTIME}(t) \subseteq \mathbf{DSPACE}(t)$$

und für jede Funktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathbf{DSPACE}(s) \subseteq \mathbf{NSPACE}(s) \subseteq \mathbf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(s)}) \text{ und } \mathbf{NSPACE}(s) \subseteq \mathbf{DSPACE}(s^2).$$

Als unmittelbare Konsequenz hiervon erhalten wir

$$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE} \subseteq \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{NEXP} \subseteq \mathbf{EXPSPACE}.$$

Die Klassen der Chomsky-Hierarchie lassen sich wie folgt einordnen (eine dicke Linie deutet an, dass die Inklusion als echt nachgewiesen werden konnte):

$$\mathbf{REG} = \mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(1)) = \mathbf{NSPACE}(\mathcal{O}(1)) \not\subseteq \mathbf{L},$$

$$\mathbf{DCFL} \not\subseteq \mathbf{LINTIME} \cap \mathbf{CFL} \not\subseteq \mathbf{LINTIME} \not\subseteq \mathbf{P},$$

$$\mathbf{CFL} \not\subseteq \mathbf{NLINTIME} \cap \mathbf{DTIME}(n^3) \not\subseteq \mathbf{P},$$

$$\mathbf{DCSL} = \mathbf{LINSPEC} \subseteq \mathbf{CSL},$$

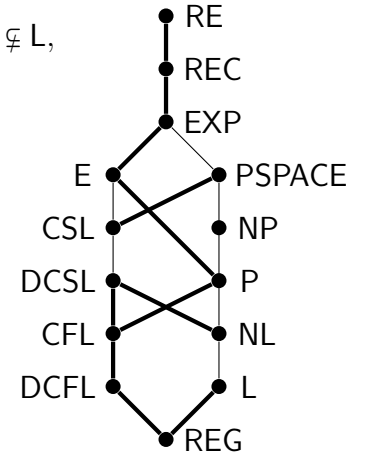
$$\mathbf{CSL} = \mathbf{NLINSPEC} \subseteq \mathbf{PSPACE} \cap \mathbf{E},$$

$$\mathbf{REC} = \bigcup \mathbf{DSPACE}(f(n))$$

$$= \bigcup \mathbf{NSPACE}(f(n))$$

$$= \bigcup \mathbf{DTIME}(f(n))$$

$$= \bigcup \mathbf{NTIME}(f(n)),$$



wobei f alle berechenbaren (oder äquivalent: alle) Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durchläuft.

Die Klasse **L** ist nicht in **CFL** enthalten, da beispielsweise die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ in logarithmischem Platz (und linearer Zeit) entscheidbar ist. Ob **P** in **CSL** enthalten ist, ist nicht bekannt. Auch nicht ob

$\text{DCSL} \subseteq \text{P}$ gilt. Man kann jedoch zeigen, dass $\text{CSL} \neq \text{P} \neq \text{DCSL}$ ist. Ähnlich verhält es sich mit den Klassen E und PSPACE : Man kann zwar zeigen, dass sie verschieden sind, aber ob eine in der anderen enthalten ist, ist nicht bekannt.

6.4 Aussagenlogische Erfüllbarkeitsprobleme

Definition 154.

a) Die Menge der **booleschen** (oder **aussagenlogischen**) **Formeln** über den Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist induktiv wie folgt definiert:

- Die Konstanten 0 und 1 sind boolesche Formeln.
- Jede Variable x_i ist eine boolesche Formel.
- Mit G und H sind auch die **Negation** $\neg G$ von G und die **Konjunktion** $(G \wedge H)$ von G und H boolesche Formeln.

b) Eine **Belegung** von $x_1, \dots, x_n$ ist ein Wort $a = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$. Der **Wert** $F(a)$ von F unter a ist induktiv über den Aufbau von F definiert:

F	0	1	x_i	$\neg G$	$(G \wedge H)$
$F(a)$	0	1	a_i	$1 - G(a)$	$G(a)H(a)$

c) Durch eine boolesche Formel F wird also eine n -stellige **boolesche Funktion** $F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ definiert, die wir ebenfalls mit F bezeichnen.

d) F heißt **erfüllbar**, falls es eine Belegung a mit $F(a) = 1$ gibt.

e) Gilt sogar für alle Belegungen a , dass $F(a) = 1$ ist, so heißt F **Tautologie**.

Beispiel 155 (Erfüllbarkeitstest mittels Wahrheitstabelle).

Da die Formel $F = ((x_1 \vee x_2) \rightarrow (\neg x_2 \wedge x_3))$ für die Belegungen

$a \in \{000, 001, 101\}$ den Wert $F(a) = 1$ annimmt, ist sie erfüllbar:

a	$(x_1 \vee x_2)$	$(\neg x_2 \wedge x_3)$	$((x_1 \vee x_2) \rightarrow (\neg x_2 \wedge x_3))$
000	0	0	1
001	0	1	1
010	1	0	0
011	1	0	0
100	1	0	0
101	1	1	1
110	1	0	0
111	1	0	0

◁

Notation. Wir verwenden die **Disjunktion** $(G \vee H)$ und die **Implikation** $(G \rightarrow H)$ als Abkürzungen für die Formeln $\neg(\neg G \wedge \neg H)$ bzw. $(\neg G \vee H)$. Zudem verwenden wir die **Äquivalenz** $(G \leftrightarrow H)$ als Abkürzung für $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$.

Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir folgende Präzedenzregeln:

- Der Junktoren $\wedge$ bindet stärker als der Junktoren $\vee$ und dieser wiederum stärker als die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- Formeln der Form $(x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ \dots \circ x_n) \dots))$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ kürzen wir durch $(x_1 \circ \dots \circ x_n)$ ab und schreiben dafür auch $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} F_i$ bzw. $\bigvee_{1 \leq i \leq n} F_i$.

Beispiel 156. Die Formel

$$G(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee \dots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \wedge x_j)$$

nimmt unter einer Belegung $a = a_1 \dots a_n$ genau dann den Wert 1 an, wenn $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ist. D.h. es gilt genau dann $G(a) = 1$, wenn genau eine Variable x_i mit dem Wert $a_i = 1$ belegt ist. Diese Formel wird im Beweis des nächsten Satzes benötigt.

◁

Bei manchen Anwendungen ist es erforderlich, eine erfüllende Belegung für eine vorliegende boolesche Formel zu finden (sofern es eine gibt). Die Frage der Erfüllbarkeit (engl. *satisfiability*) von booleschen Formeln hat also große praktische Bedeutung.

Aussagenlogisches Erfüllbarkeitsproblem (SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F in den Variablen $x_1, \dots, x_n$.

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Dabei kodieren wir boolesche Formeln F durch Binärstrings w_F und ordnen umgekehrt jedem Binärstring w eine Formel F_w zu. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir jedoch meist F anstelle von w_F schreiben.

Satz 157 (Cook, Karp, Levin). SAT ist NP-vollständig.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass SAT $\in$ NP ist, da eine NTM zunächst eine Belegung a für eine gegebene booleschen Formel F nichtdeterministisch raten und dann in Polynomialzeit testen kann, ob $F(a) = 1$ ist (*guess and verify* Strategie).

Es bleibt zu zeigen, dass SAT NP-hart ist. Sei L eine beliebige NP-Sprache und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte k -NTM mit $L(M) = L$. Da sich eine $t(n)$ -zeitbeschränkte k -NTM in Zeit $t^2(n)$ durch eine 1-NTM simulieren lässt, können wir $k = 1$ annehmen. Unsere Aufgabe besteht nun darin, in Polynomialzeit zu einer gegebenen Eingabe $w = w_1 \dots w_n$ eine Formel F_w zu konstruieren, die genau dann erfüllbar ist, wenn $w \in L$ ist,

$$w \in L \Leftrightarrow F_w \in \text{SAT}.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $Z = \{q_0, \dots, q_m\}$, $E = \{q_m\}$ und $\Gamma = \{a_1, \dots, a_l\}$ ist. Zudem können wir annehmen, dass δ für jedes Zeichen $a \in \Gamma$ die Anweisung $q_m a \rightarrow q_m a N$ enthält.

Die Idee besteht nun darin, die Formel F_w so zu konstruieren, dass sie unter einer Belegung a genau dann wahr wird, wenn a eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ beschreibt. Hierzu bilden wir F_w über

den Variablen

$$\begin{aligned} x_{t,q}, & \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), q \in Z, \\ y_{t,i}, & \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), -p(n) \leq i \leq p(n), \\ z_{t,i,a}, & \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), -p(n) \leq i \leq p(n), a \in \Gamma, \end{aligned}$$

die für folgende Aussagen stehen:

- $x_{t,q}$: zum Zeitpunkt t befindet sich M im Zustand q ,
- $y_{t,i}$: zur Zeit t besucht M das Feld mit der Nummer i ,
- $z_{t,i,a}$: zur Zeit t steht das Zeichen a auf dem i -ten Feld.

Konkret sei nun $F_w = R \wedge S \wedge \dot{U}_1 \wedge \dot{U}_2 \wedge E$. Dabei stellt die Formel $R = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} R_t$ (Randbedingungen) sicher, dass wir jeder erfüllenden Belegung eindeutig eine Folge von Konfigurationen $K_0, \dots, K_{p(n)}$ zuordnen können:

$$R_t = G(x_{t,q_0}, \dots, x_{t,q_m}) \wedge G(y_{t,-p(n)}, \dots, y_{t,p(n)}) \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} G(z_{t,i,a_1}, \dots, z_{t,i,a_l}).$$

Die Teilformel R_t sorgt also dafür, dass zum Zeitpunkt t

- genau ein Zustand $q \in \{q_0, \dots, q_m\}$ eingenommen wird,
- genau ein Bandfeld $i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}$ besucht wird und
- auf jedem Feld i genau ein Zeichen $a \in \Gamma$ steht.

Die Formel S (wie Startbedingung) stellt sicher, dass zum Zeitpunkt 0 tatsächlich die Startkonfiguration

$-p(n)$	-1	0		$n-1$	n	$p(n)$
$\sqcup$	$\dots$	$\sqcup$	w_1	$\dots$	w_n	$\sqcup$
		$\uparrow$				
		q_0				

vorliegt:

$$S = x_{0,q_0} \wedge y_{0,0} \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{-1} z_{0,i,\sqcup} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} z_{0,i,w_{i+1}} \wedge \bigwedge_{i=n}^{p(n)} z_{0,i,\sqcup}$$

Die Formel $\dot{U}_1$ sorgt dafür, dass der Inhalt von nicht besuchten Feldern beim Übergang von K_t zu K_{t+1} unverändert bleibt:

$$\dot{U}_1 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} (\neg y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \rightarrow z_{t+1,i,a})$$

Die Formel $\dot{U}_2$ achtet darauf, dass sich bei jedem Übergang der Zustand, die Kopfposition und das gerade gelesene Zeichen gemäß einer Anweisung in δ verändern:

$$\dot{U}_2 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \bigwedge_{p \in Z} (x_{t,p} \wedge y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \rightarrow \bigvee_{(q,b,D) \in \delta(p,a)} x_{t+1,q} \wedge y_{t+1,i+D} \wedge z_{t+1,i,b}),$$

wobei

$$i + D = \begin{cases} i - 1, & D = L \\ i, & D = N \\ i + 1, & D = R \end{cases}$$

ist. Schließlich überprüft E , ob M zur Zeit $p(n)$ den Endzustand q_m erreicht hat:

$$E = x_{p(n),q_m}$$

Da der Aufbau der Formel $f(w) = F_w$ einem einfachen Bildungsgesetz folgt und ihre Länge polynomiell in n ist, folgt $f \in \text{FP}$. Es ist klar, dass F_w im Fall $w \in L(M)$ erfüllbar ist, indem wir die Variablen von F_w gemäß einer akz. Rechnung von $M(w)$ belegen. Umgekehrt führt eine Belegung a mit $F_w(a) = 1$ wegen $R(a) = 1$ eindeutig auf eine Konfigurationsfolge $K_0, \dots, K_{p(n)}$, so dass gilt:

- K_0 ist Startkonfiguration von $M(w)$ (wegen $S(a) = 1$),

- $K_i \vdash K_{i+1}$ für $i = 0, \dots, p(n) - 1$ (wegen $\dot{U}_1(a) = \dot{U}_2(a) = 1$),
- M nimmt spätestens in der Konfiguration $K_{p(n)}$ den Endzustand q_m an (wegen $E(a) = 1$).

Also gilt für alle $w \in \Sigma^*$ die Äquivalenz $w \in L(M) \Leftrightarrow F_w \in \text{SAT}$, d.h. die FP-Funktion $f: w \mapsto F_w$ reduziert $L(M)$ auf SAT. ■