Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 11

Aufgabe 41 Die Klasse der quantifizierten boolschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

(1) Jede quantorenfreie boolsche Formel ist eine Q-Formel.

(2) Ist G eine Q-Formel, so auch $\exists y G$ und $\forall y G$.

Sei F eine Q-Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und sei $a = a_1 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$ eine Belegung. Der Wert von F unter a ist dann $F(a)$, falls F quantorenfrei ist, $G(a0) \vee G(a1)$, falls $F = \exists y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist, und $G(a0) \wedge G(a1)$, falls $F = \forall y\, G(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist.

a) Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas), definiert durch

   Gegeben: Eine Q-Formel F.
   Gefragt: Ist F unter allen Belegungen wahr?

   PSPACE-vollständig ist.

b) Überlegen Sie sich, wie sich aus QBF vollständige Probleme für die Stufen der Polynomialzeithierarchie ableiten lassen.

Aufgabe 42 (schriftlich, 10 Punkte)

Bezeichne DIRGI das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen und bezeichne TURNIER die Menge aller Turniergraphen. (Zur Erinnerung: Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) vorhanden ist.) Zeigen Sie:

a) DIRGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt DIRGI $\equiv_{\text{log}}$ GI.

b) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen TURNIER $\cap$ DIRGI liegt in $\oplus\mathrm{P}$.

Aufgabe 43 Eine k-**Färbung** von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne COLGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

a) COLGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt COLGI $\equiv_{\text{log}}$ GI.

b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.