

## Übungsblatt 6

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 7. Dezember 2021, 15:00 Uhr

### Aufgabe 28 *mündlich*

Zeigen Sie, dass das CIRVAL-Problem für Schaltkreise der Tiefe  $d$  und Größe  $s$  in Platz  $\mathcal{O}(d + \log s)$  entscheidbar ist.

### Aufgabe 29 *mündlich*

Zeigen Sie, dass QBF PSPACE-vollständig ist.

### Aufgabe 30 *mündlich*

- Zeigen Sie:
- (a) Das Problem SUBGI, für zwei Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $G$  isomorph zu einem Teilgraphen von  $H$  ist, ist NP-vollständig.
  - (b) Das Problem TAUT, für eine gegebene boolesche Formel  $F$  die Allgemeingültigkeit zu entscheiden, ist co-NP-vollständig.
  - (c) Das Problem, für einen gegebenen gerichteten Graphen  $G$  zu entscheiden, ob er stark zusammenhängend ist, ist NL-vollständig.
  - (d) Das Independent Set Problem für bipartite Graphen liegt in P.  
*Hinweis:* Benutzen Sie den Heiratssatz.
  - (e) Das Erfüllbarkeitsproblem für KNF-Formeln  $F$ , in denen jede Variable höchstens zweimal vorkommt, liegt in P.
  - (f) Das Erfüllbarkeitsproblem für 3-KNF-Formeln, in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, ist NP-vollständig.
  - (g) Das Erfüllbarkeitsproblem für 3-KNF-Formeln, in denen alle Klauseln aus genau drei verschiedenen Literalen bestehen und in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, liegt in P.
  - (h) Das Problem 3-COLORING, für einen Graphen  $G$  zu entscheiden, ob er 3-färbbar ist, ist NP-vollständig.  
*Hinweis:* Reduzieren Sie NAESAT  $\leq$  3-COLORING.

### Aufgabe 31 *10 Punkte*

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph. Eine Knotenmenge  $D \subseteq V$  heißt **dominierend**, falls für jeden Knoten  $v \notin D$  ein Knoten  $u \in D$  mit  $(u, v) \in E$  existiert. Das **Dominating Set Problem (DOMSET)** ist wie folgt definiert:

**Gegeben:** Ein Digraph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k$ .

**Gefragt:** Hat  $G$  eine dominierende Menge  $D$  der Größe  $\|D\| \leq k$ ?

$G$  heißt **Turniergraph**, falls für alle Knoten  $u \neq v$  genau eine der beiden Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  vorhanden ist. Zeigen Sie:

- (a) DOMSET ist NP-vollständig.  
*(Hinweis: Zeigen Sie  $VC \leq DOMSET$ .)*
- (b) Ein Turniergraph mit  $n \geq 2$  Knoten hat eine dominierende Menge der Größe  $\lceil \log_2 n \rceil$ .
- (c) Falls das Dominating Set Problem für Turniergraphen NP-vollständig ist, dann gilt  $NP \subseteq DTIME(n^{\mathcal{O}(\log n)})$ .