

Theoretische Informatik 2

11. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 15.-18.1.
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 22. Januar

Aufgabe 71 [mündlich]

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl größer 3 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung gilt.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung stimmt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

berechenbar ist.

b) Beschreiben Sie informell eine DTM, die bei einer beliebigen Eingabe $x \in \{0, 1\}^*$ genau dann eine 0 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

Aufgabe 72 Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen [mündlich]

1. A ist vom Typ 0,
2. A wird von einer 1-NTM akzeptiert.

Aufgabe 73 Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen [mündlich]

1. A ist semi-entscheidbar,
2. $\hat{\chi}_A$ ist berechenbar,
3. A ist Definitionsbereich einer berechenbaren partiellen Funktion f .

Aufgabe 74 [mündlich]

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Dann ist die *lexikographische Ordnung* $<$ auf Σ^* wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \leq |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Eine Funktion $f : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *monoton*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle Wörter $x \leq y$ gilt. Eine Sprache A heißt *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls A leer oder Bild einer monotonen berechenbaren Funktion ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. A ist entscheidbar,
2. χ_A ist berechenbar,
3. A ist in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar,
4. A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 75 Zeigen Sie: [mündlich]

Jede unendliche semi-entscheidbare Sprache besitzt eine unendliche entscheidbare Teilmenge. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 76 [4 Punkte]

Gelten folgende Aussagen für beliebige semi-entscheidbare Sprachen A und beliebige entscheidbare Sprachen B ? Begründen Sie.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $A \setminus B$ ist entscheidbar, | c) $A \setminus B$ ist semi-entscheidbar, |
| b) $B \setminus A$ ist entscheidbar, | d) $B \setminus A$ ist semi-entscheidbar. |

Aufgabe 77 Für $D \in \{L, R, N\}$ sei [6 Punkte]

$$L_D = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} M_w \text{ ist eine 1-DTM, die bei Eingabe } \varepsilon \\ \text{niemals die Kopfbewegung } D \text{ ausführt} \end{array} \right\}.$$

Für welche Werte von D ist L_D entscheidbar?