Einführung in die KI

Prof. Dr. sc. Hans-Dieter Burkhard
Vorlesung Winter-Semester 2003/04

1. Suchverfahren-Teil2:

Problemzerlegung

Spielbäume

1.4 Suche in Und-oder-Bäumen

Problemzerlegung

Und-oder-Baum

Lösungsbaum

Lösungsverfahren

Umformung in Zustandsraum-Suche

Beschränkung auf Bäume!

Problemzerlegung

Zerlege ein Problem P in einzelne Probleme $P_1,...,P_n$

Löse jedes Problem P_i

Füge die Lösungen zusammen zu P

Beispiele:

- Ungarischer Würfel
- Kurvendiskussion
- Integralrechnung
- Prolog: Klausel -> Subgoals

Prolog: Klausel als Problemzerlegung

$goal(X_1,...,X_n)$:- $subgoal_1(X_1,...,X_n)$,..., $subgoal_m(X_1,...,X_n)$.

um „goal“ zu beweisen,

beweise alle „subgoals“

Problemzerlegung

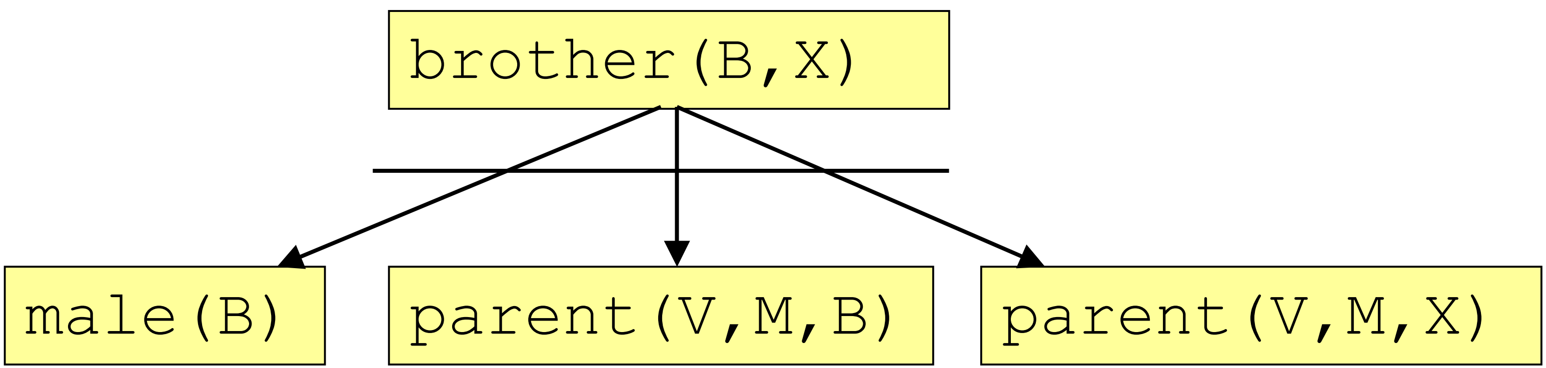
```
erreichbar(Start,Ziel,Zeit)
:- s_bahn(Start,Zwischenziel,Abfahrt,Ankunft,_),
   erreichbar(Zwischenziel,Ziel,Zeit1),
   addiereZeit(Zeit1,Ankunft,Abfahrt,Zeit).
```

Rekursion: wiederholte Problemzerlegung

Problemzerlegung

Graphische Darstellung

```
brother(B,X)
:- male(B), parent(V,M,B), parent(V,M,X)
```



Abhängigkeit von Teilproblemen

Unabhängige Teilprobleme

- Spielzüge eines Gegners, Seminarscheine, ...

Abhängige Teilprobleme

- Inhaltlich:
  - Bindungen von Variablen in Prolog-Klauseln,
  - Ressourcen, ...
- Zeitlich:
  - Fertigungsschritte,
  - Reihenfolge der Teil-Verhalten beim Doppelpass,..

Alternativen für Problemzerlegung

Zerlegung des Problems P in Probleme $P_1,...,P_n$

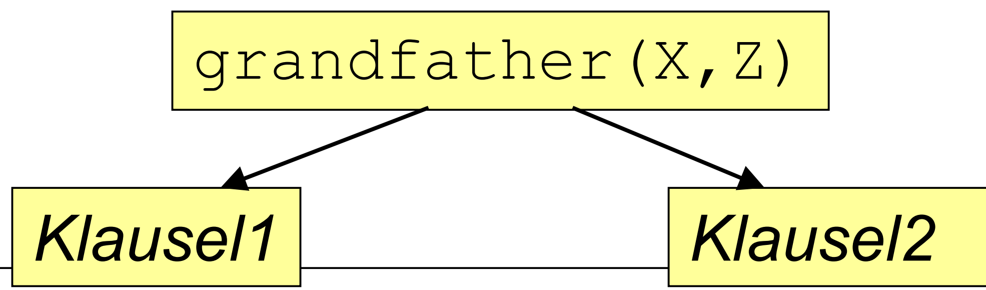
oder in Probleme $P'_1,...,P'_{n'}$

oder ...

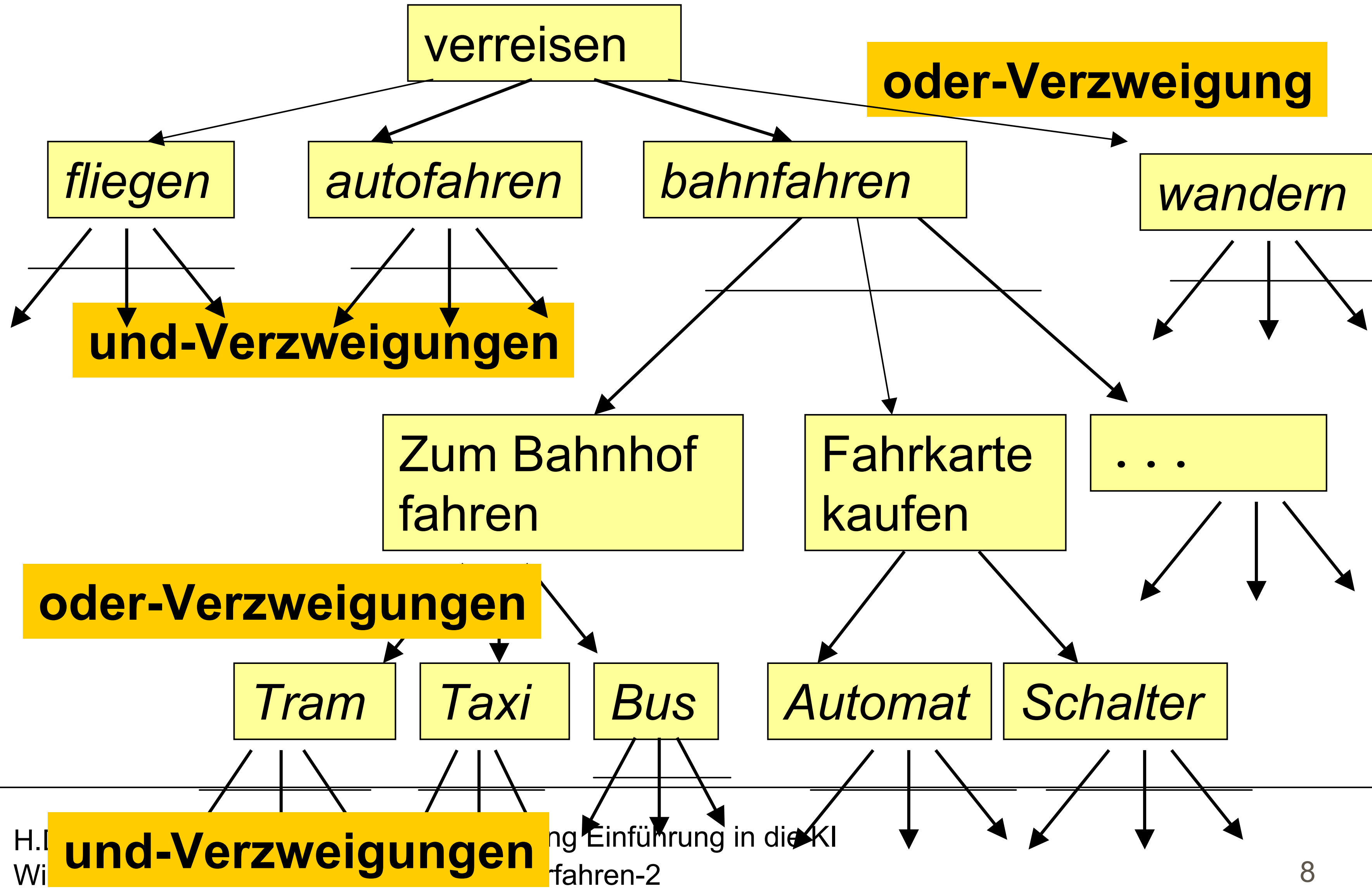
Klauseln einer Prolog-Prozedur bieten Alternativen

```
grandfather(X,Z):-father(X,Y),father(Y,Z).
grandfather(X,Z):-father(X,Y),mother(Y,Z).
```

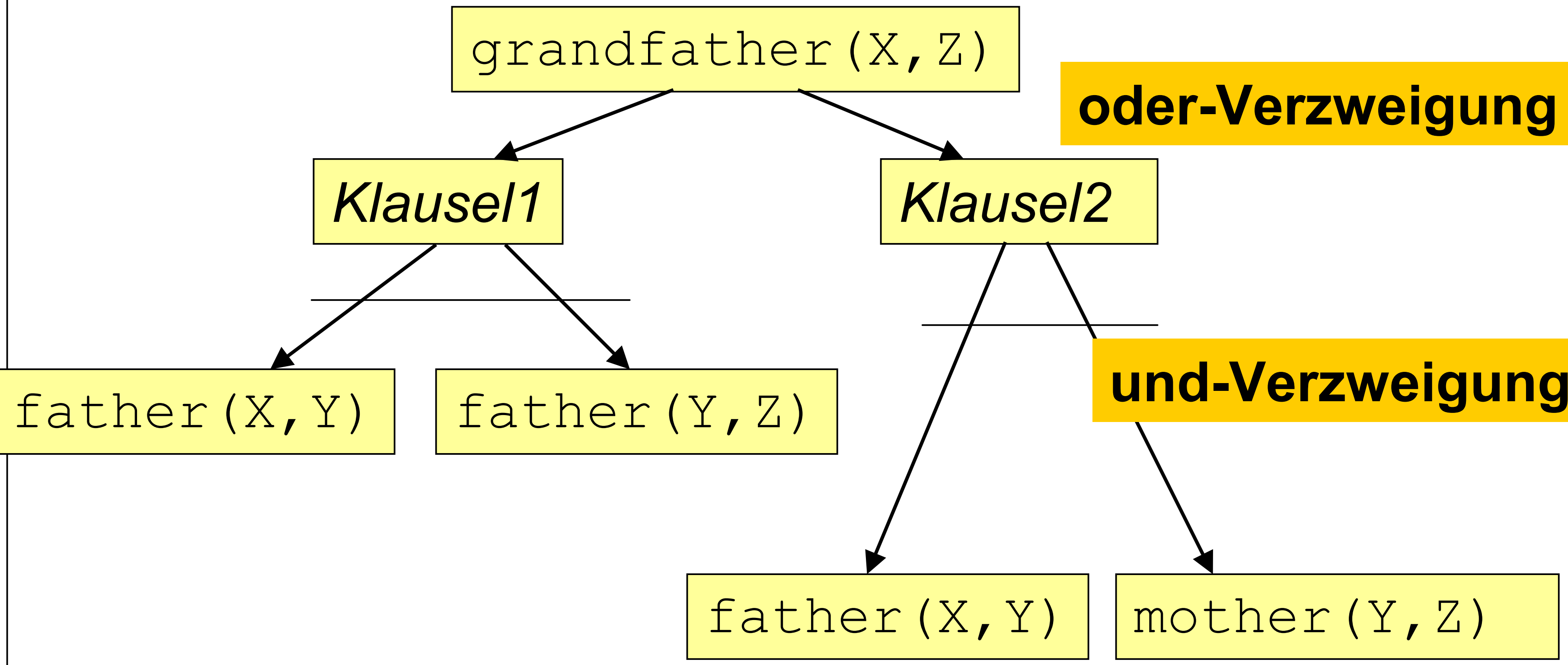
Graphische Darstellung



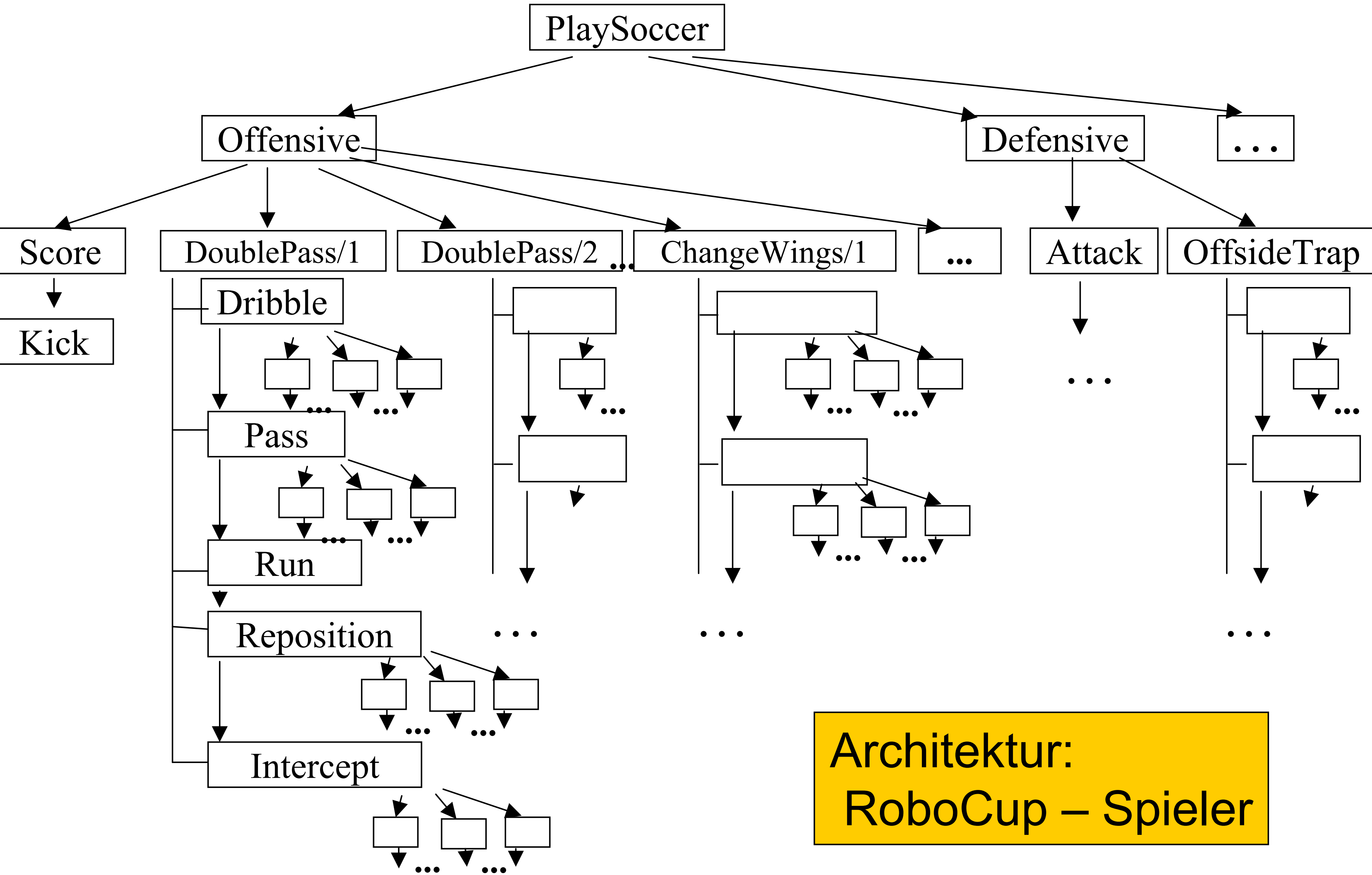
Kombinierte Verzweigungen



Kombinierte Verzweigungen



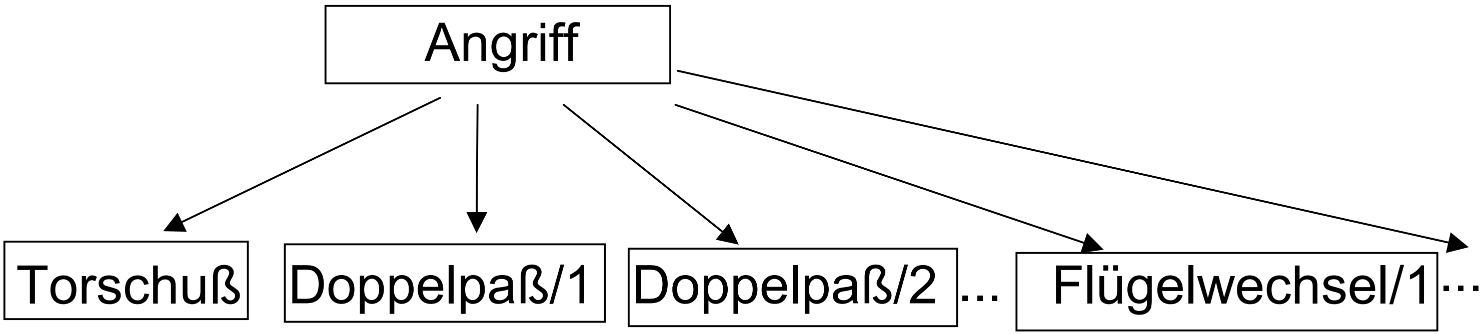
(Virtuelle) Optionen Hierarchie



Architektur:
RoboCup – Spieler

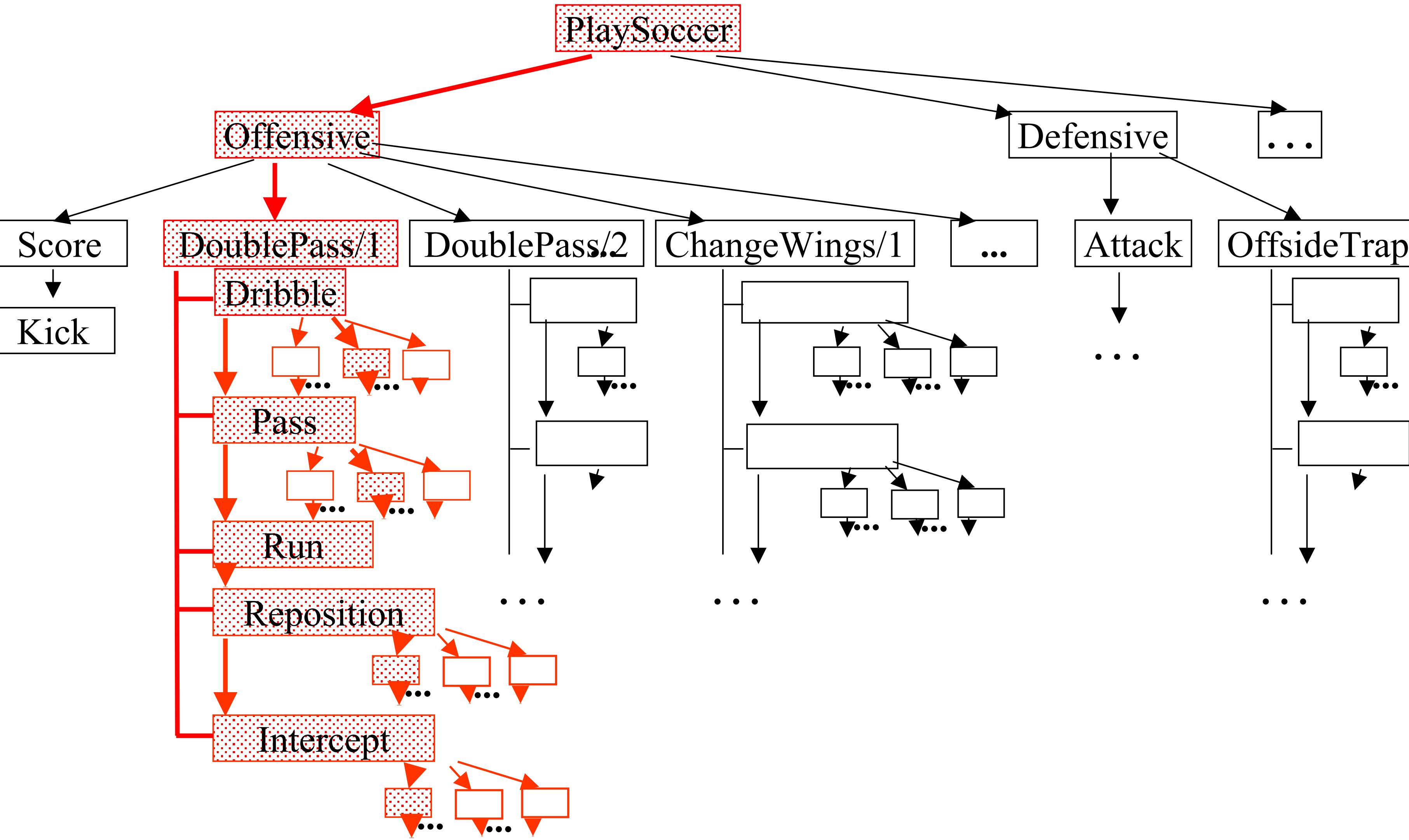
Oder-Verzweigungen

Auswahlmöglichkeiten in der Optionenhierarchie



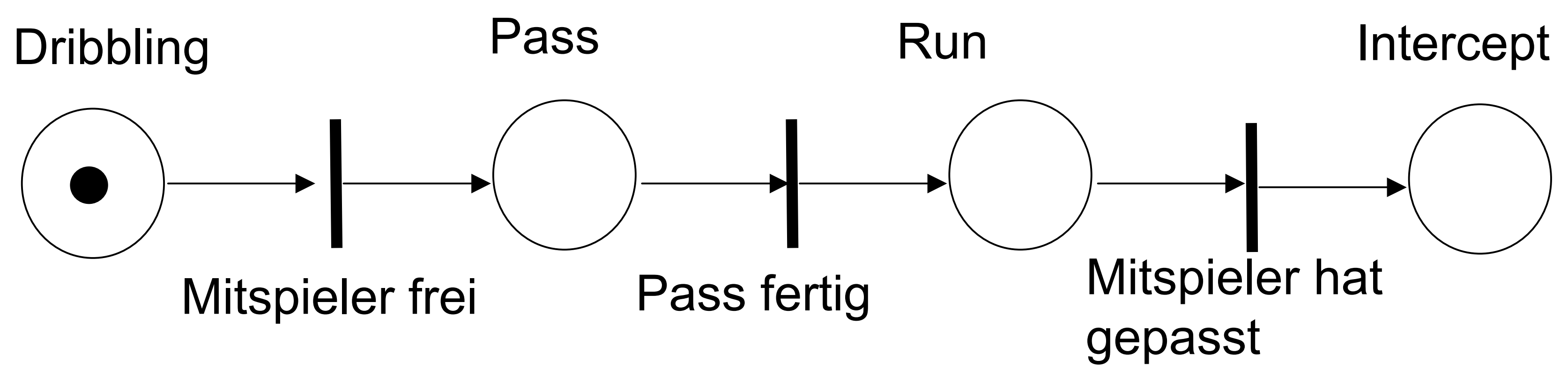
Deliberator trifft Auswahl auf allen Ebenen

Intention Subtree (Resultat des Deliberators)



Und-Verzweigungen

Ablauf komplexer Optionenen



Weiteres Problem: „Least commitment“:

Konkrete Werte erst spät festlegen

Und-Oder-Baum

Ein Und-oder-Baum besteht (abwechselnd) aus

– Knoten mit oder-Verzweigungen und

– Knoten mit und-Verzweigungen

Modell für Problemzerlegungen:

– oder-Verzweigungen für alternative Möglichkeiten zur Problemzerlegung

– und-Verzweigungen für Teilprobleme

Modell für Prolog-Programm:

– oder-Verzweigungen für alternative Klauseln einer Prozedur

– und-Verzweigungen für subgoals einer Klausel

Und-Oder-Baum

Anfrage

Startknoten („**Wurzel**“) modelliert Ausgangsproblem

Knoten ohne Nachfolger („**Blätter**“) sind unterteilt in

- terminale Knoten („primitive Probleme“)
  modellieren unmittelbar lösbare Probleme

Fakt

- nichtterminale Knoten
  modellieren nicht zu lösende Probleme

Unerfüllbares Goal

(keine unifizierende Klausel)

Innere Knoten sind unterteilt in

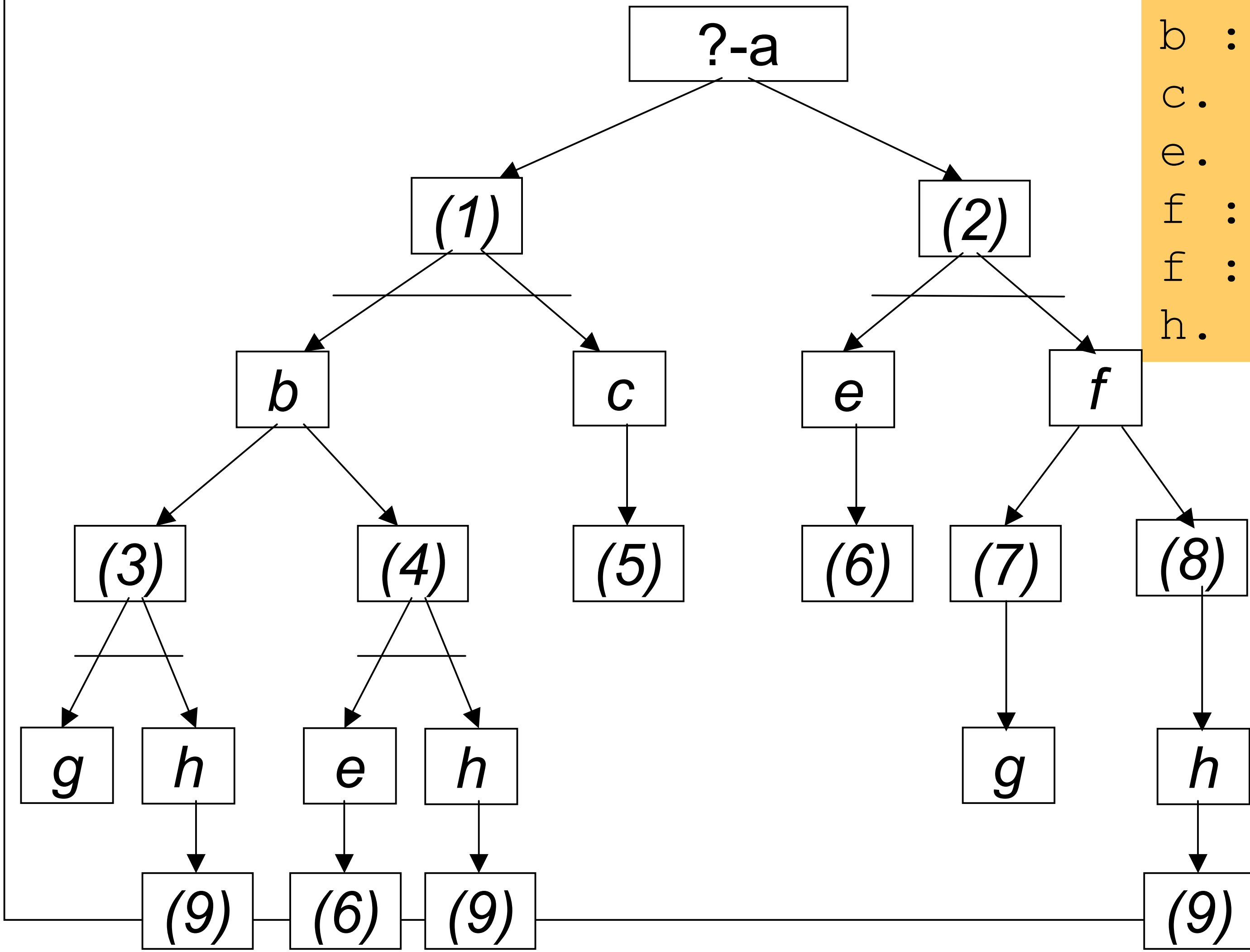
- Knoten mit und-Verzweigung
- Knoten mit oder-Verzeigung

Subgoals einer Klausel

Alternative Klauseln

Und-Oder-Baum

```
a :- b,c. % (1)
a :- e,f. % (2)
b :- g,h. % (3)
b :- e,h. % (4)
c.        % (5)
e.        % (6)
f :- g.   % (7)
f :- e    % (8)
h.        % (9)
```



Lösbare/unlösbare Knoten

Lösbare Knoten:

1. terminale Knoten,
2. Knoten mit Und-Verzweigung:
   falls alle Nachfolger lösbar sind
3. Knoten mit Oder-Verzweigung:
   falls mindestens ein Nachfolger lösbar ist

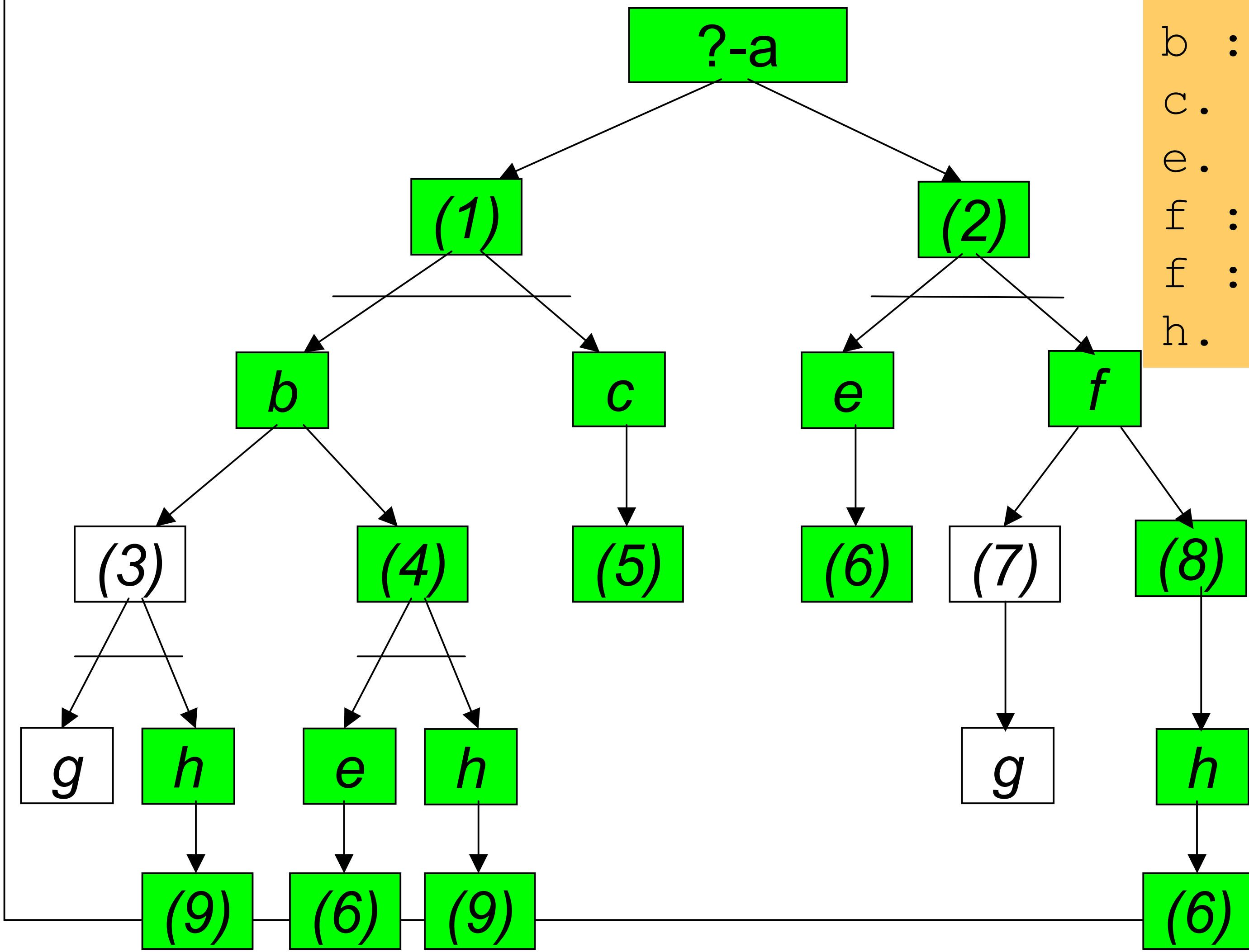
Unlösbare Knoten:

1. nichtterminale Knoten,
2. Knoten mit Und-Verzweigung:
   falls mindest. ein Nachfolger unlösbar,
3. Knoten mit Oder-Verzweigung:
   falls alle Nachfolger unlösbar sind

Für endliche Bäume ergibt sich bei Festlegung für die Blätter eine eindeutige Zerlegung in lösbare/unlösbare Knoten
(Bedingungen sind jeweils komplementär)

Lösbare/unlösbare Knoten

```
a :- b,c.   % (1)
a :- e,f.   % (2)
b :- g,h.   % (3)
b :- e,h.   % (4)
c.          % (5)
e.          % (6)
f :- g.     % (7)
f :- e      % (8)
h.          % (9)
```



Bottom-up-Konstruktionsalgorithmus

Anfang: $M_{LÖSBAR}$:= terminale Knoten

$M_{UNLÖSBAR}$:= nichtterminale Knoten

Zyklus:

Solange nicht alle Knoten untersucht wurden:

Wähle Knoten k, dessen Nachfolger alle untersucht wurden.

Falls k und-Verzweigung und alle Nachfolger von k in $M_{LÖSBAR}$

oder falls k oder-Verzw. und ein Nachfolger von k in $M_{LÖSBAR}$:

$$M_{LÖSBAR} := M_{LÖSBAR} \cup \{k\} \quad ,$$

andernfalls:

$$M_{UNLÖSBAR} := M_{UNLÖSBAR} \cup \{k\} \quad .$$

Bottom-up-Konstruktionsalgorithmus

Ergebnis für endliche Und-oder-Bäume:

Zerlegung der Knoten in

lösbare Knoten ($M_{LÖSBAR}$) und

unlösbare Knoten ($M_{UNLÖSBAR}$)

Das Ausgangsproblem

kann genau dann durch Problemzerlegung gelöst werden,

wenn der Startknoten in $M_{LÖSBAR}$ ist.

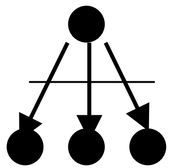
Falls Ausgangsproblem lösbar ist, kann ein <u>Lösungsbaum</u>

konstruiert werden.

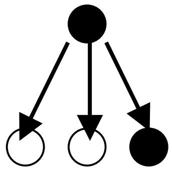
Lösungsbaum

Endlicher Teilbaum des Und-oder-Baums mit folgenden Eigenschaften:

- Enthält nur lösbare Knoten,
- enthält Wurzelknoten,
- bei Und-Verzweigungen sind alle Nachfolger enthalten,



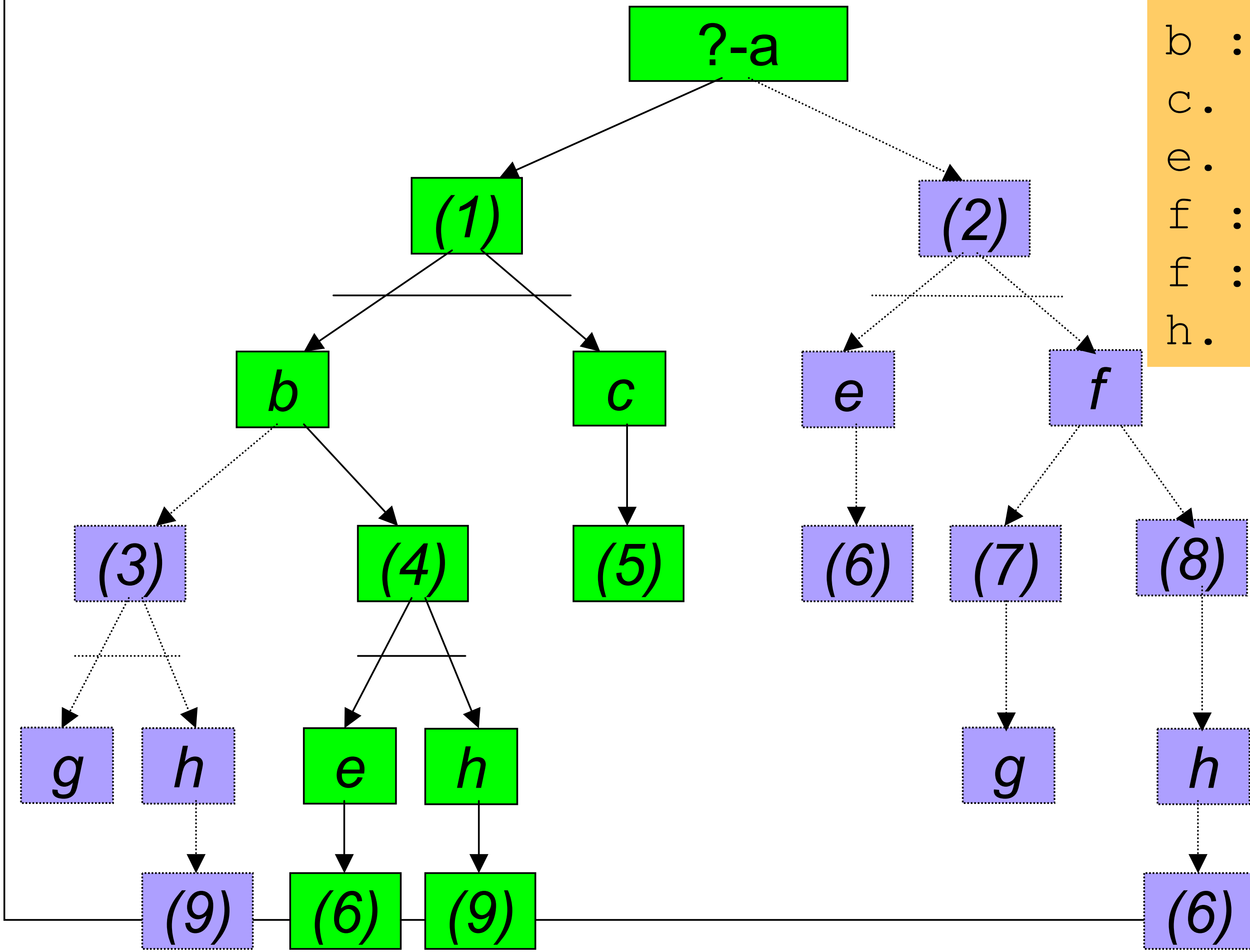
- bei Oder-Verzweigungen ist (genau) ein Nachfolger enthalten



Modell für „Beweisbaum“ in PROLOG

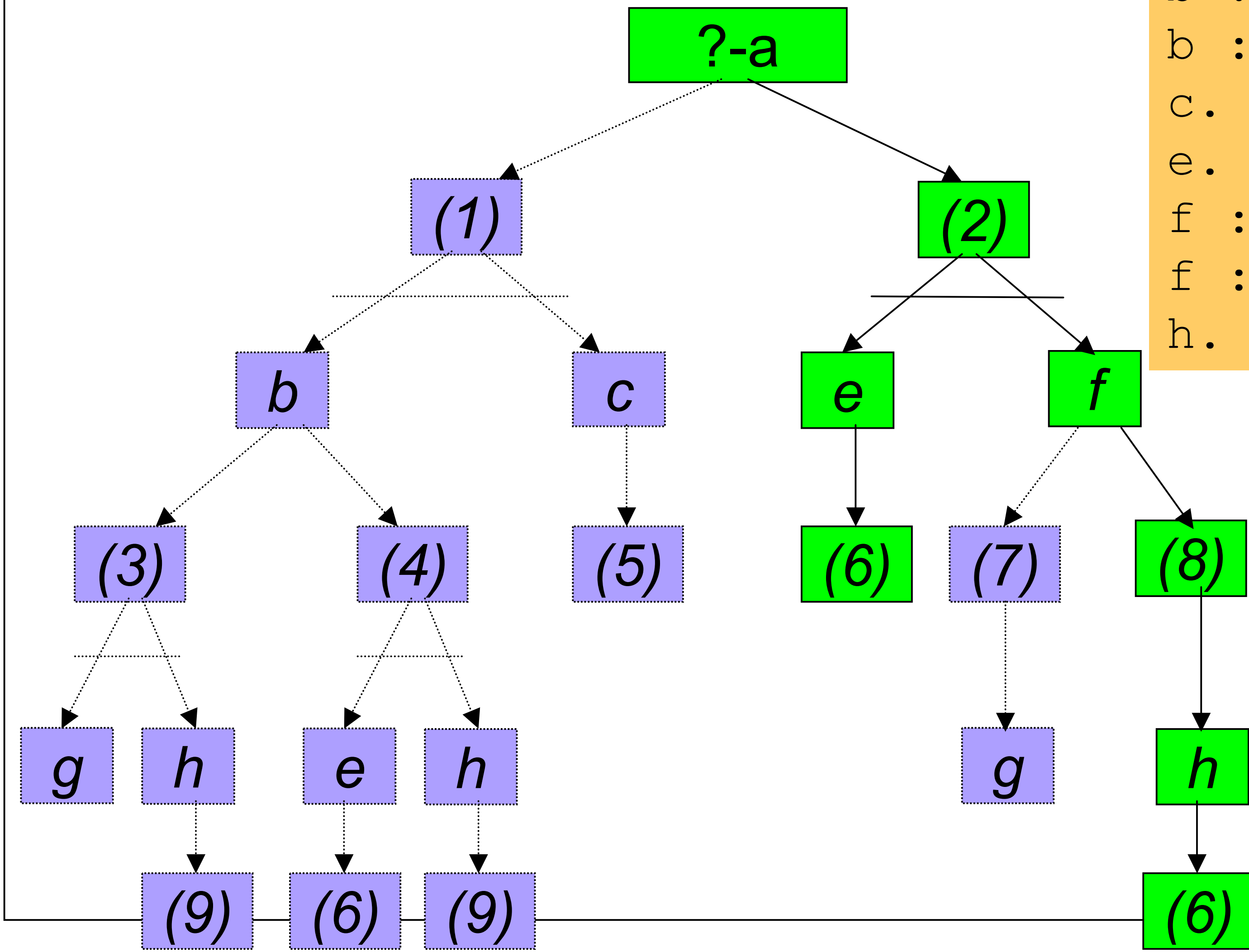
Lösungsbäume

```
a  :- b,c.  % (1)
a  :- e,f.  % (2)
b  :- g,h.  % (3)
b  :- e,h.  % (4)
c.          % (5)
e.          % (6)
f  :- g.    % (7)
f  :- e     % (8)
h.          % (9)
```

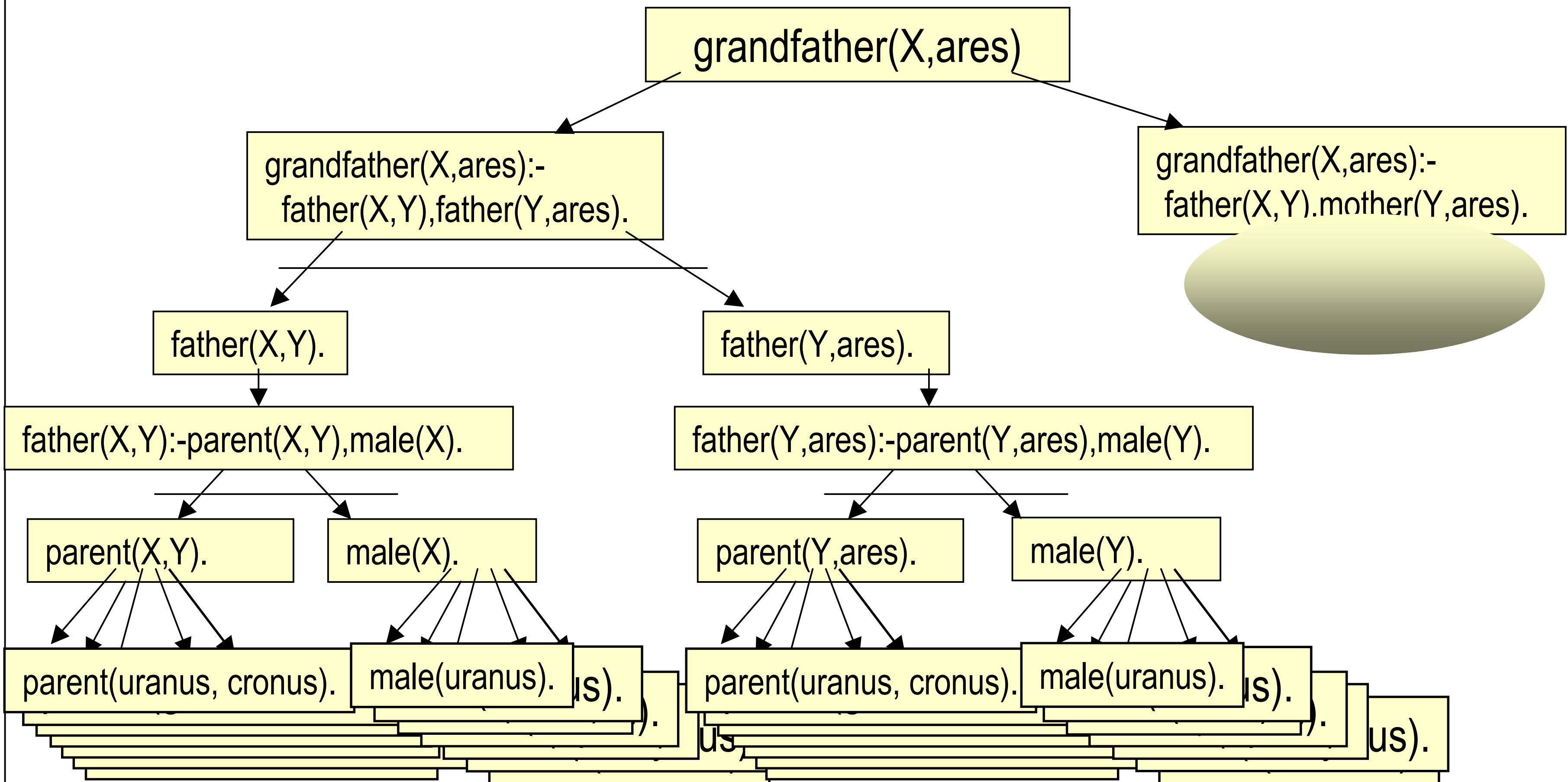


Lösungsbäume

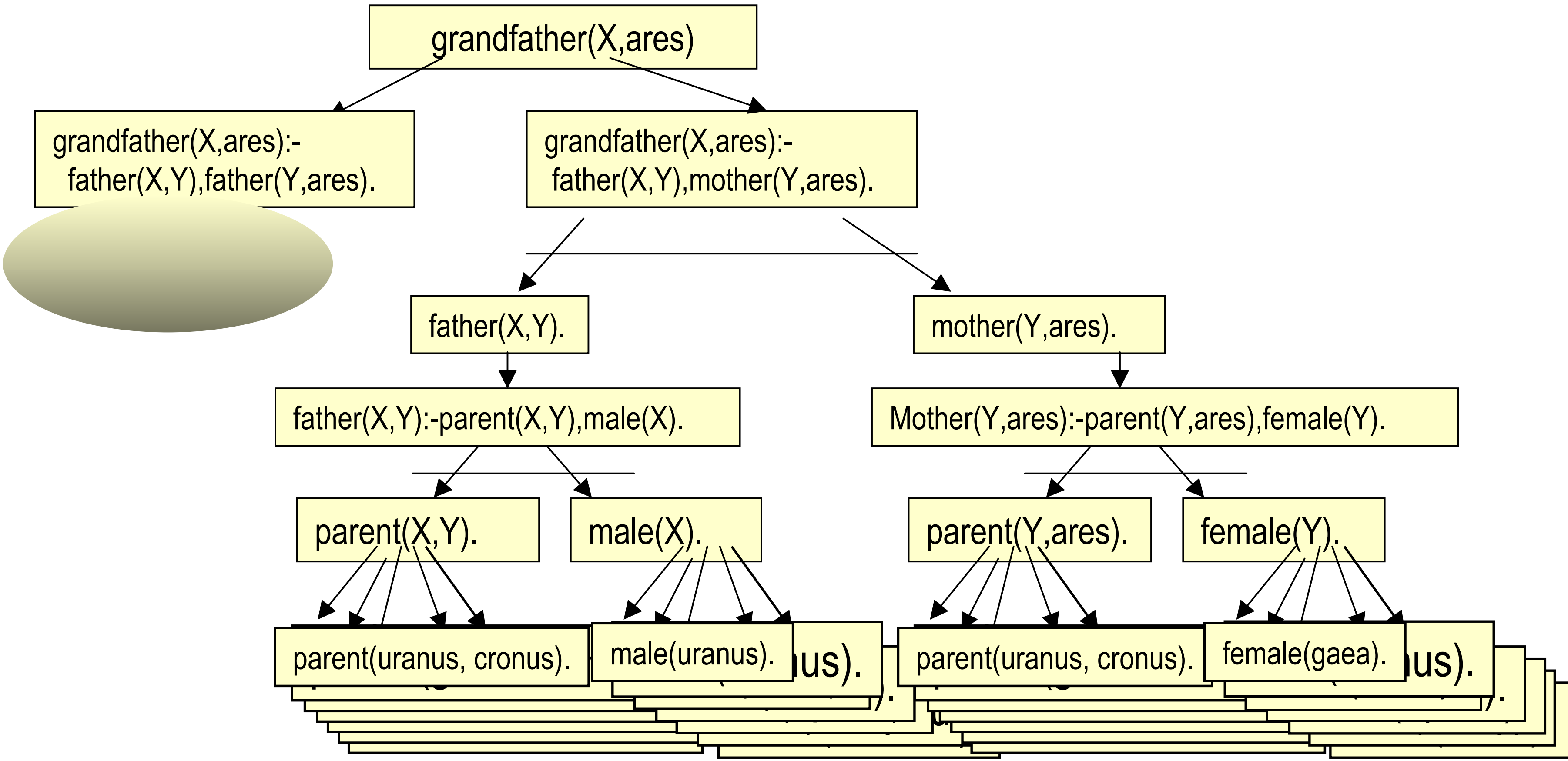
```
a  :- b,c.  % (1)
a  :- e,f.  % (2)
b  :- g,h.  % (3)
b  :- e,h.  % (4)
c.          % (5)
e.          % (6)
f  :- g.    % (7)
f  :- e     % (8)
h.          % (9)
```



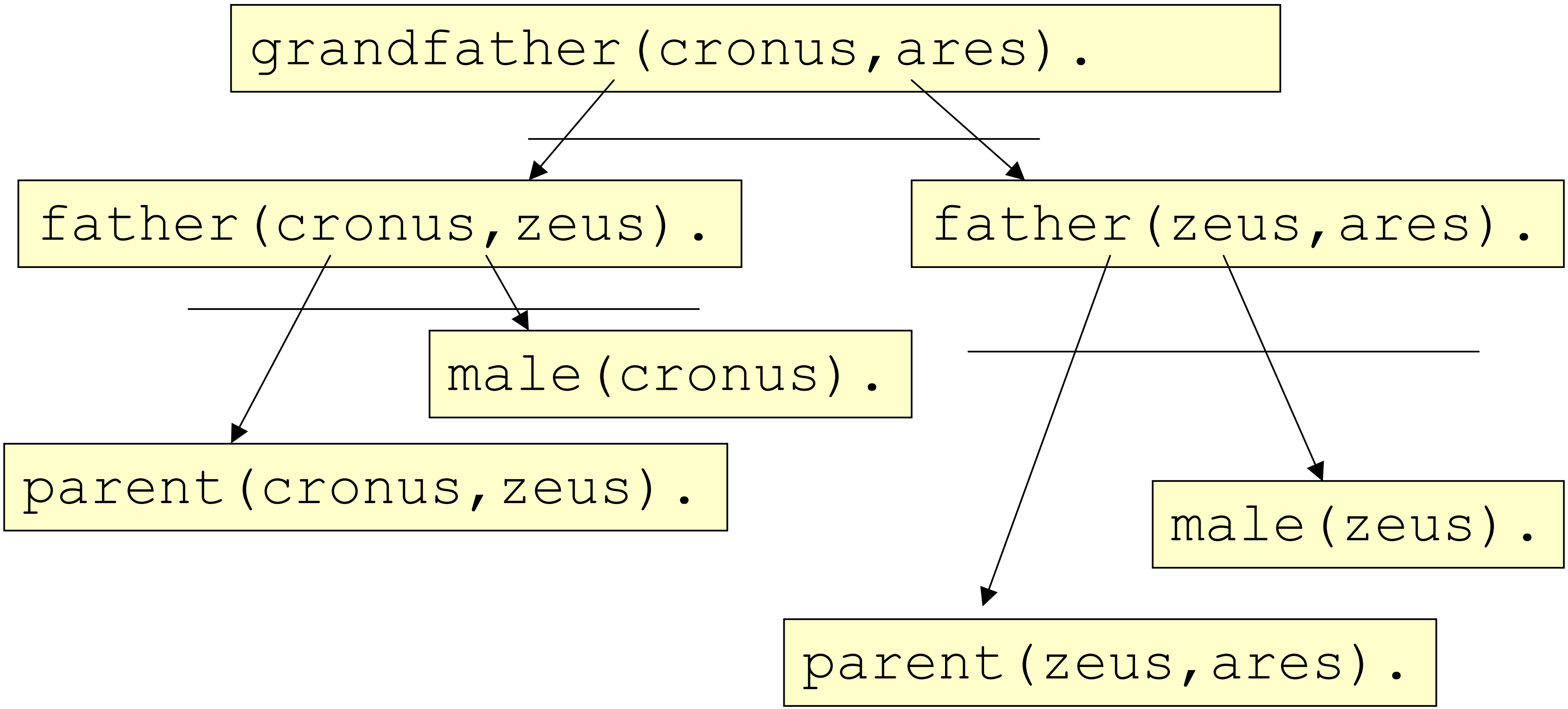
Und-oder-Baum modelliert Beweisversuche



Und-oder-Baum modelliert Beweisversuche



Lösungsbaum modelliert „Beweisbaum“



Modell für *nicht-deterministische* Suche

Beispiel: Vereinfachtes PROLOG-Schema

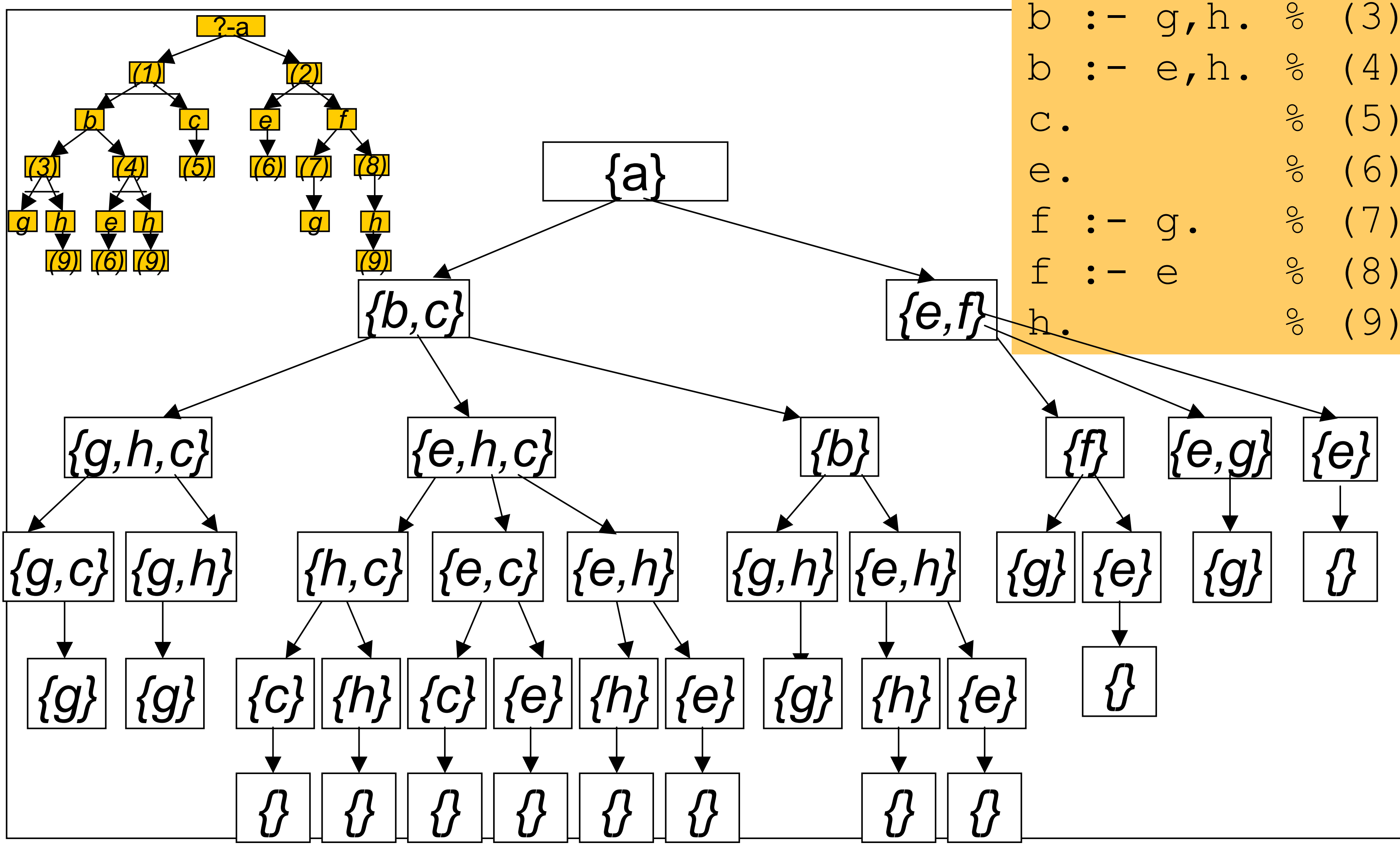
(ohne Unifikation: „Aussagen-Kalkül“)

1. Initialisiere: subgoals=$\{g_1,\ldots,g_n\}$
2. Falls subgoals = $\emptyset$: Erfolg.
3. Wähle $g \in$ subgoals .
4. Wähle Klausel k: g :- $g'_1,\ldots,g'_m$ der Prozedur für g .
   Falls kein solches k existiert: Mißerfolg (des Versuchs).
5. subgoals := $(\{g_1,\ldots,g_n\} - \{g\}) \cup \{g'_1,\ldots,g'_m\}$.
   Weiter bei 2.

Alle Varianten probieren,
falls keine zum Erfolg führt: „Nicht beweisbar“

Varianten für ND-Suche

```
a :- b,c. % (1)
a :- e,f. % (2)
b :- g,h. % (3)
b :- e,h. % (4)
c.        % (5)
e.        % (6)
f :- g.   % (7)
f :- e    % (8)
h.        % (9)
```



Alle Varianten (**jeden Weg von der Wurzel aus**) probieren,
falls keine zum Erfolg führt: „Nicht beweisbar“

Prolog-Interpreter

Einschränkung der Varianten

- Reihenfolge innerhalb einer Klausel (Und-Verzweigung)

  (alle subgoals müssen erfüllt werden)

  links vor rechts

- Reihenfolge innerhalb einer Prozedur (Oder-Verzweigung)

  (Alternativen für Beweis)

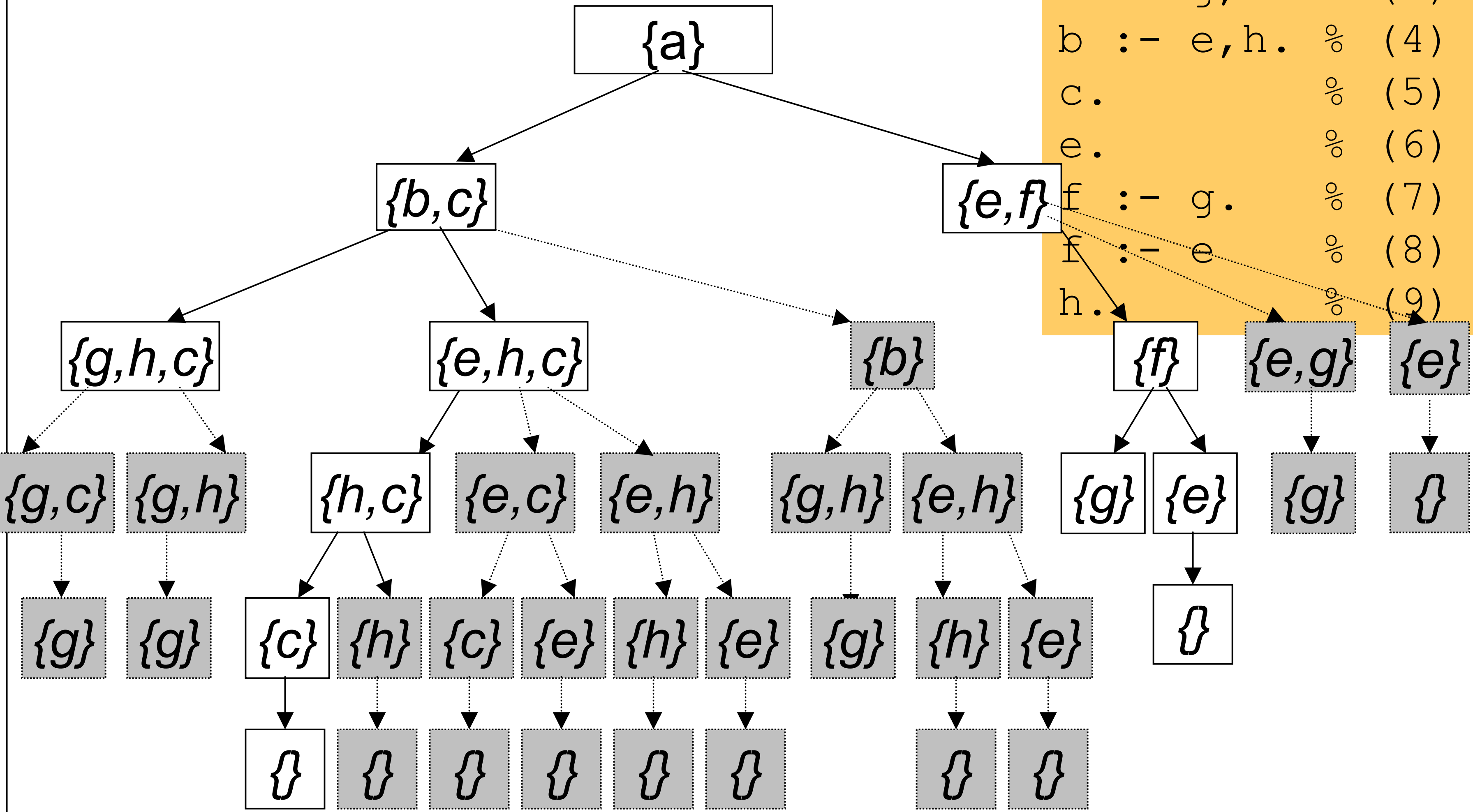
  oben vor unten

Zu zeigen wäre:

Wenn Beweis existiert, dann auch schon hierbei.

Einschränkung der Varianten

```
a :- b,c. % (1)
a :- e,f. % (2)
b :- g,h. % (3)
b :- e,h. % (4)
c.        % (5)
e.        % (6)
f :- g.   % (7)
f :- e    % (8)
h.        % (9)
```



Subgoals sind alle zu beweisen, Reihenfolge links vor rechts

Backtracking

Effizienzgewinn

Wege werden nicht vollständig neu probiert, sondern nur stückweise.

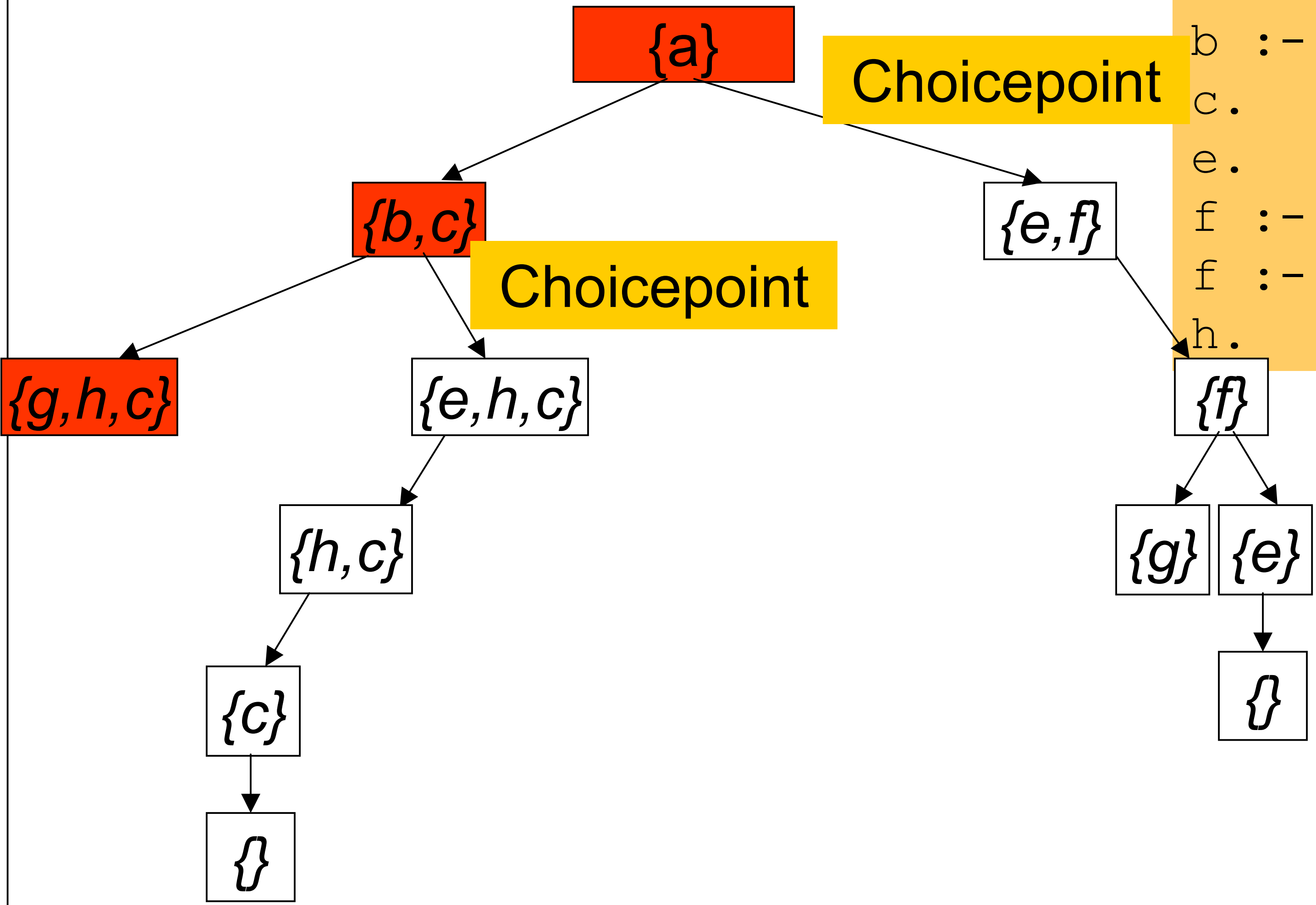
Bei Alternativen: Einfügen eines „Choicepoint“

„Backtracking“:

Bei Fehlschlag am jüngsten „Choicepoint“ andere Alternative verfolgen

Backtracking

```
a :- b,c.  % (1)
a :- e,f.  % (2)
b :- g,h.  % (3)
b :- e,h.  % (4)
c.         % (5)
e.         % (6)
f :- g.    % (7)
f :- e     % (8)
h.         % (9)
```



Modelle für Prolog-Suche

Vereinfachtes Schema (ohne Unifikation: „AK“)

Liste

1. subgoals=$[g_1,\ldots,g_n]$.
2. Falls subgoals = [ ] : Erfolg .
3. k sei nächste Klausel der Prozedur für g_1 :

   g_1 :- $g'_1,\ldots,g'_m$.

   Falls kein solches k existiert: Backtracking.

   Falls kein Backtracking möglich: Misserfolg.
4. subgoals := $[g'_1,\ldots,g'_m, g_2,\ldots,g_n]$.

   Weiter bei 2.

Prolog-Interpreter

- Und-Verzweigung: links vor rechts
- Teilziele der Reihe nach vollständig abarbeiten

Verfolgen eines Zweiges in die Tiefe

- Oder-Verzweigung: oben vor unten

Linke Zweige zuerst

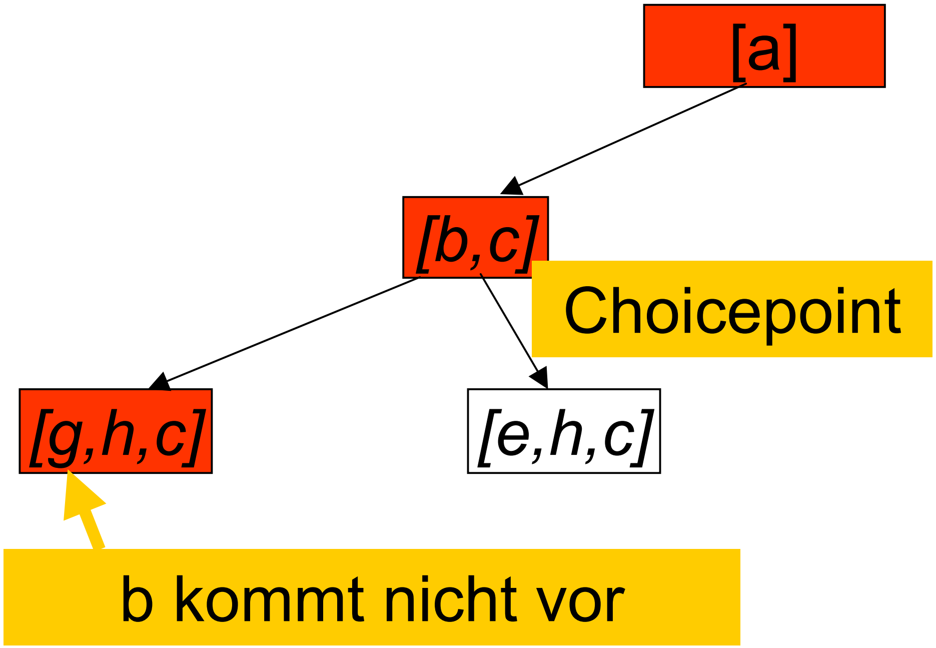
- Backtracking bei Fehlschlag:

  Rückkehr zu Alternative an oder-Verzweigung

Nächster Zweig einer Oder-Verzweigung

Problem: Choicepoint in subgoal –Liste nicht repräsentierbar

Modelle für Prolog-Suche

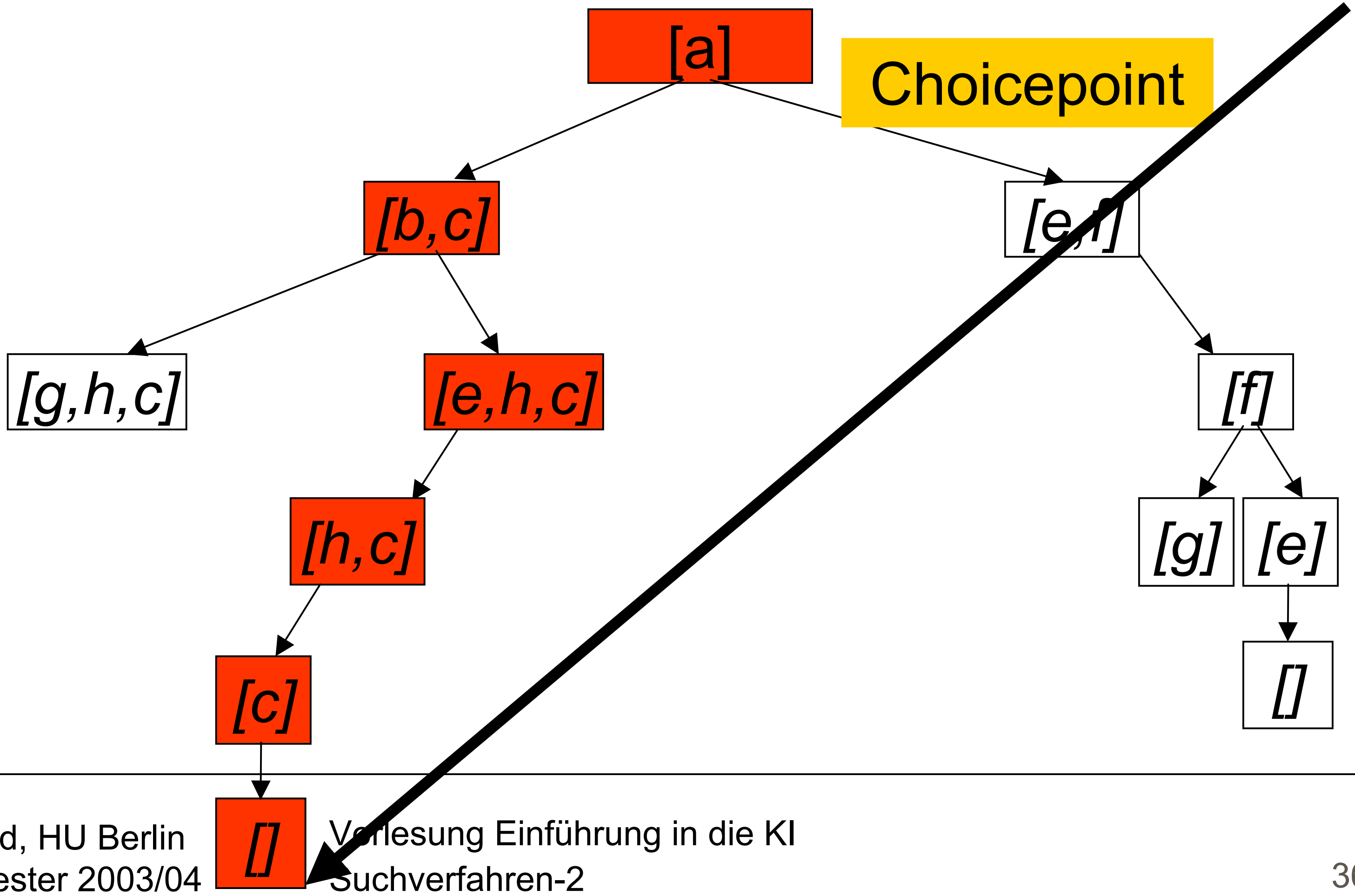


Problem: Choicepoint in subgoal –Liste nicht repräsentierbar

Quelle für Missverständnisse

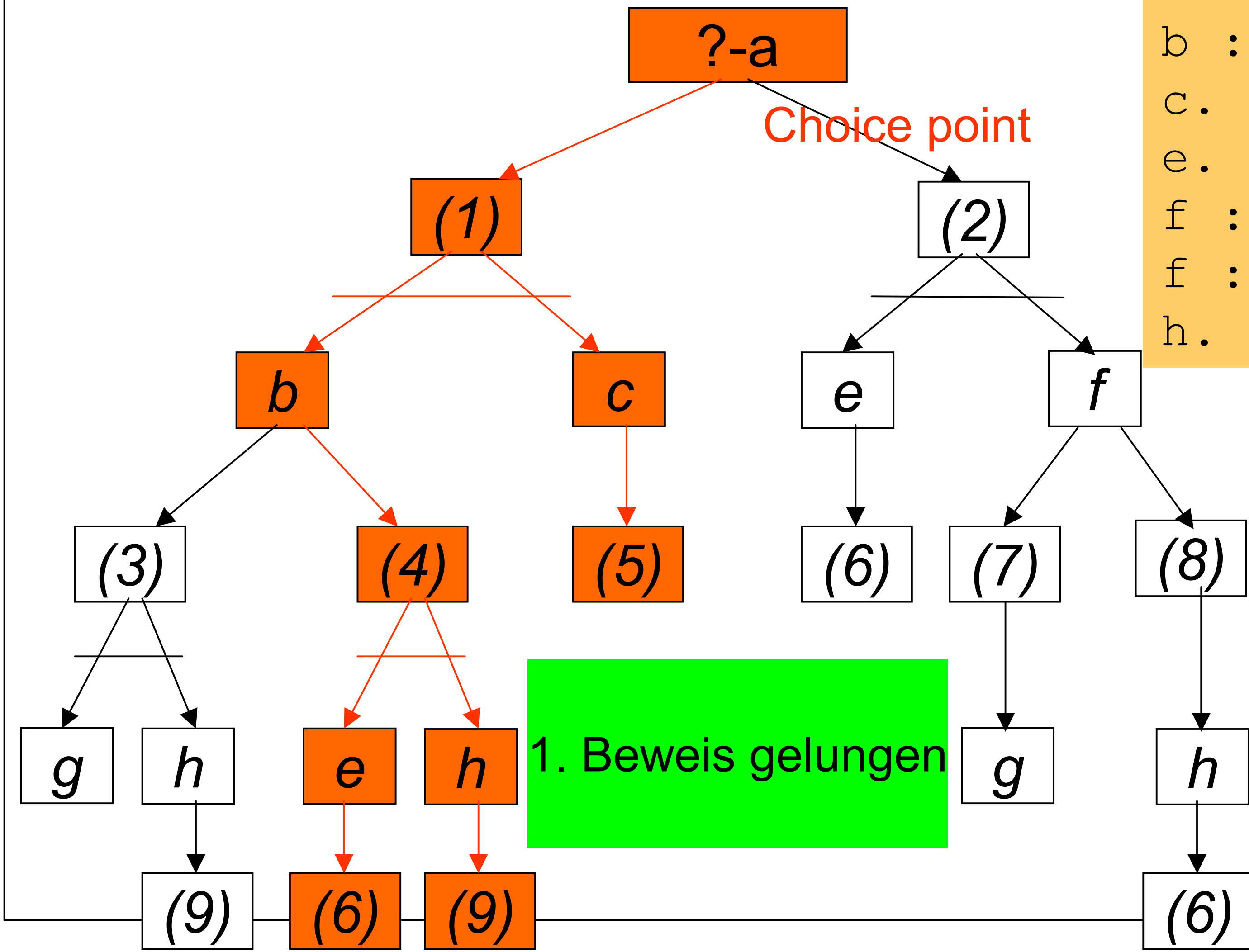
Bei erfolgreichem Beweis ist subgoal-Liste leer

Aber Baum noch nicht vollständig durchsucht

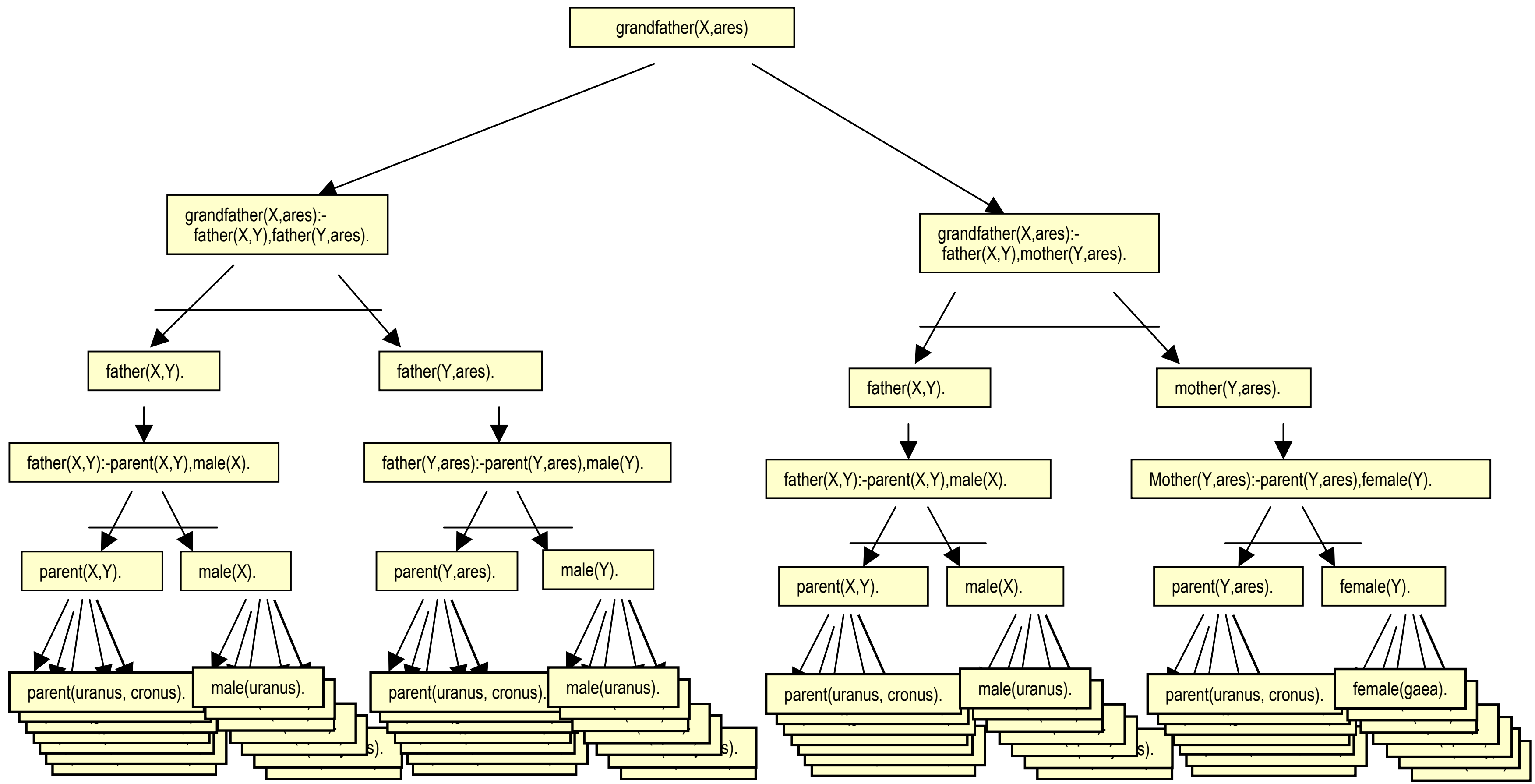


Abarbeitung im Und-oder-Baum

```
a  :- b,c.  % (1)
a  :- e,f.  % (2)
b  :- g,h.  % (3)
b  :- e,h.  % (4)
c.          % (5)
e.          % (6)
f  :- g.    % (7)
f  :- e     % (8)
h.          % (9)
```



Algorithmus für systematische Suche



Algorithmus für systematische Suche

PROCEDURE solve(unsolved_goals: GOALLIST);

$goals = [g_1,\ldots,g_n]$ Bezeichnet Liste von goals g_i

$top(goals) = g_1$ Bezeichnet erstes Element

$tail(goals) = [g_2,\ldots,g_n]$ Bezeichnet Rest-Liste

$NIL = [\ ]$ Bezeichnet leere Liste

$concatenate([g_1,\ldots,g_n], [g'_1,\ldots,g'_m]) = [g_1,\ldots,g_n , g'_1,\ldots,g'_m]$

Bezeichnet Verkettung von Listen

Algorithmus für systematische Suche

PROCEDURE solve(unsolved_goals: GOALLIST);

unsolved_goals	Liste ungelöster subgoals
klauseln(g)	Klauseln der Prozedur für g

```
ackermann(o,N,s(N)).
ackermann(s(M),o,V):- ackermann(M,s(o),V).
ackermann(s(M),s(N),V):- ackermann(s(M),N,V1),ackermann(M,V1,V).
```

subgoals(k)	Subgoals der Klausel k

ackermann(s(M),s(N),V):- **ackermann(s(M),N,V1), ackermann(M,V1,V).**

Algorithmus für systematische Suche

```
PROCEDURE solve(unsolved_goals: GOALLIST);
            VAR k:KLAUSEL, g: GOAL;
BEGIN
 IF unsolved_goals = NIL THEN HALT(yes)
 ELSE g:= top(unsolved_goals);
   FORALL k ∈ klauseln(g) DO
              (* Klauseln für g nacheinander rekursiv probieren*)
     solve(concatenate(subgoals(k),tail(unsolved_goals)))
              (* subgoals der Klausel k weiter verfolgen *)
   END (*FORALL*)
 END (*IF*)
END solve;
```

Choicepoints

Reihenfolge: oben vor unten

Reihenfolge: links vor rechts

Aufruf mit solve([goal]); HALT(no).

Algorithmus für systematische Suche

Rekursive Prozedur-Aufrufe mit Subgoal-Listen.

Bei leerer Subgoalliste:

- Resultat „yes“
- Abbruch der Prozedur-Kette.

Nach erfolgloser vollständiger Abarbeitung einer Aufruf-Kette Rückkehr zur jüngsten Möglichkeit gemäß FORALL ... (<u>Backtracking</u>).

Wenn alle (FORALL-)Varianten erfolglos versucht:

- Resultat „no“
- Prozedur-Ketten vollständig abgearbeitet.

Algorithmus für systematische Suche

Transformation in Zustandsraumsuche:
Subgoal-Listen sind Zustände eines Zustandsraums

Algorithmus verwendet eigentlich zwei Listen
(gemäß LIFO-Prinzip: Keller/stacks)

- Liste unsolved_goals

- Liste der offenen Prozedur-Aufrufe (Prozedurkeller) mit Alternativen für Backtracking"

Andere Repräsentation der Zustände:

Betrachtung als verschachtelte Listen

$\mathcal{L} = [\ L_1,\ldots,L_m\ ]$

$= [\ [g_{11},\ \ldots,\ g_{1n}]\ ,\ \ldots,\ [g_{i1},\ \ldots,\ g_{i,ni}],\ \ldots\ ,\ [g_{m1},\ \ldots,\ g_{m,nm}]\ ]$

Algorithmus für systematische Suche

(0) (Start) $\mathcal{L} := [\,[\text{Ausgangsproblem(e)}]\,]$.

(1) Falls $\mathcal{L} = [[\,], \ldots, [\,]]$: EXIT(yes) .

(2) Sei L_i erste nicht-leere Subgoal-Liste aus $\mathcal{L} = [\,L_1, \ldots, L_m\,]$.

Sei g_{i1} erstes Element aus $L_i = [g_{i1}, \ldots, g_{i,ni}]$:

- g_{i1} aus L_i entfernen: $L'_i := [g_{i2}, \ldots, g_{i,ni}]$.
- Falls keine Klauseln für g_{i1} existieren: weiter bei **(4)** .

(3) Sei k die nächste abzuarbeitende Klausel für g_{i1} .

Falls k Fakt: weiter bei **(1)** .

Falls k Regel: g_{i1} :- $g_1, \ldots, g_n$:

$\mathcal{L} := [\,[g_1, \ldots, g_n], L_1, \ldots, L'_i, \ldots, L_m\,]$.

Falls weitere Klauseln für g_{i1} existieren: *Choice Point* setzen.

Weiter bei **(2)** .

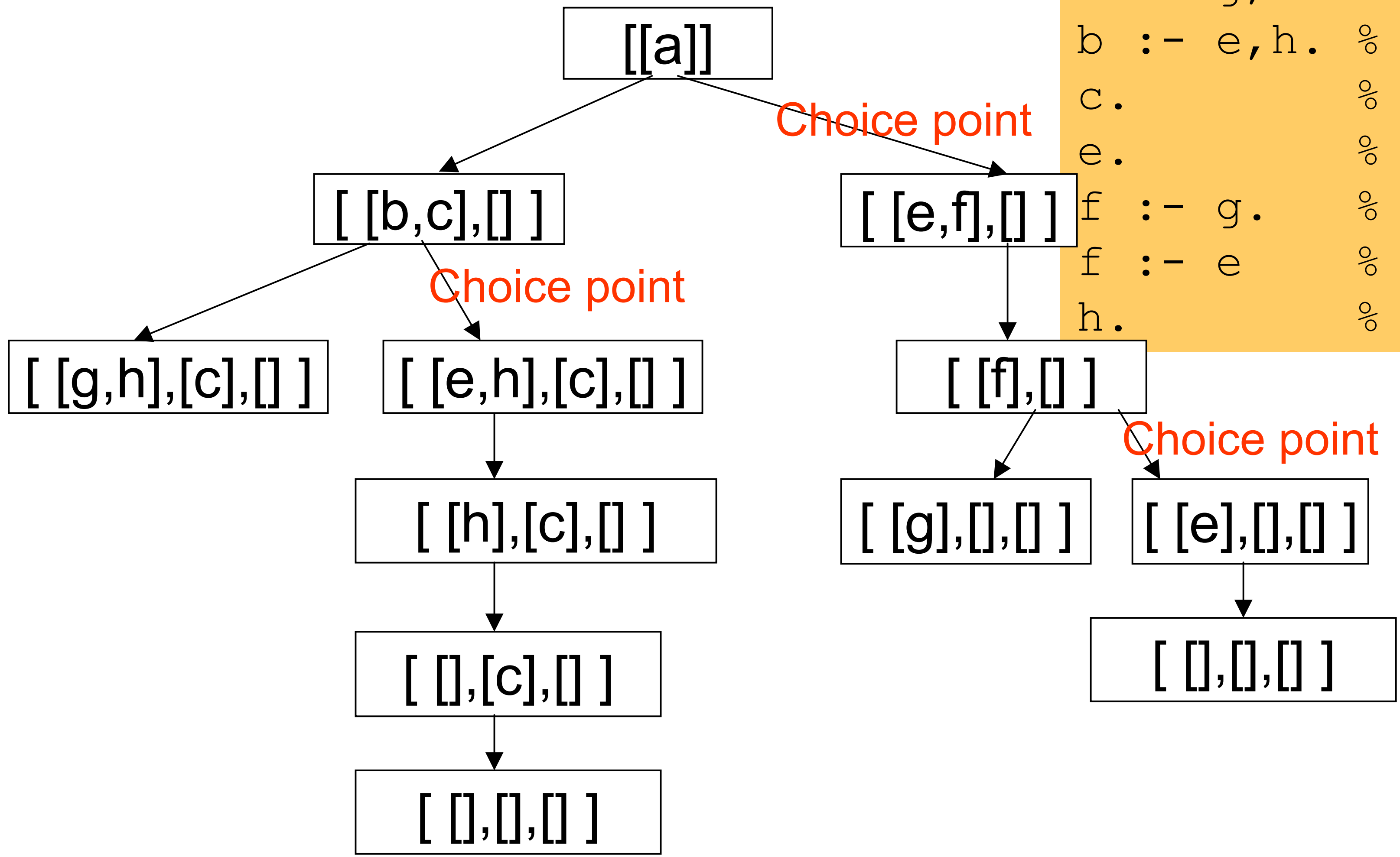
(4) Backtracking: Rücksetzen zum jüngsten *Choice Point* :

$\mathcal{L}$ zurücksetzen auf Stand vor *Choice Point* , weiter bei **(3)** .

Falls kein *Choice Point* existiert: $\mathcal{L} = [\,]$, EXIT(no).

Algorithmus für systematische Suche

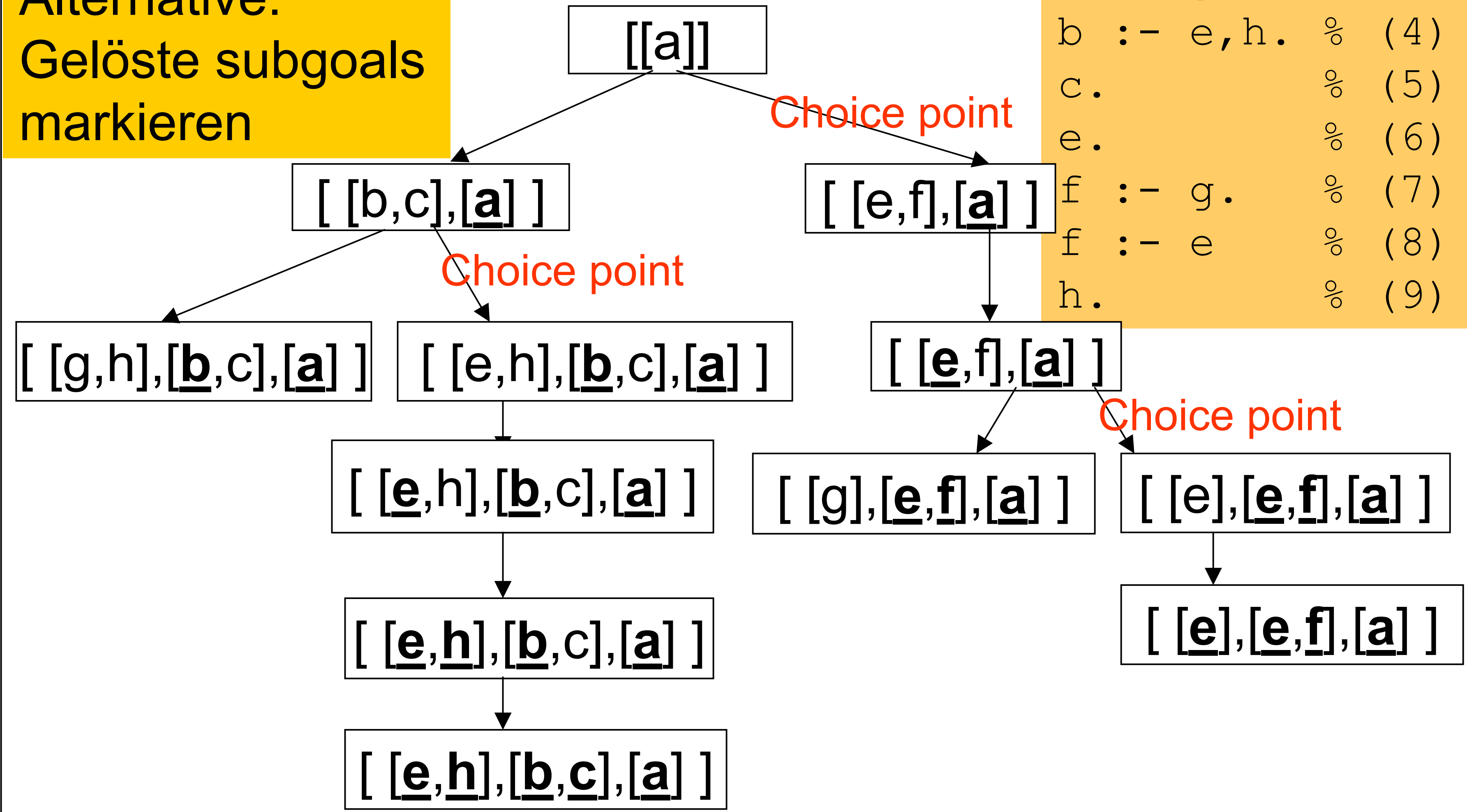
```
a :- b,c. % (1)
a :- e,f. % (2)
b :- g,h. % (3)
b :- e,h. % (4)
c.        % (5)
e.        % (6)
f :- g.   % (7)
f :- e    % (8)
h.        % (9)
```



Algorithmus für systematische Suche

```
a :- b,c.  % (1)
a :- e,f.  % (2)
b :- g,h.  % (3)
b :- e,h.  % (4)
c.         % (5)
e.         % (6)
f :- g.    % (7)
f :- e     % (8)
h.         % (9)
```

Alternative:
Gelöste subgoals markieren



Effizientere Implementation

Bekannt sind:

- Reihenfolge von Klauseln in Prozeduren
- Reihenfolge von subgoals in Klauseln

Zur Laufzeit nicht gesamte Listen speichern, sondern nur Referenz auf jeweils nächsten Eintrag

g_i statt $[g_i, \ldots, g_n]$,

Weitere Probleme für Prolog

Behandlung von Variablenbindungen (Unifikation).

Später mehr dazu

Eingriffe in den Beweisablauf (cut).

Effiziensteigerung (vorzeitige Speicherfreigabe), z.B.

- –last call Optimierung („lco“)
- –deterministische Klauseln („dco“)

Prolog-Compiler: Übersetzung in optimiertes Programm

(WAM = Warren abstract machine)

Algorithmen für Problemzerlegung

Analog zu Prolog-Variante:

- Transformation in Zustandsraum
- Anwendung entsprechender Verfahren

Betrachtung der (abgewickelten) Und-Oder-Bäume

Prinzipiell auch für Und-Oder-Graphen möglich, aber schwer überschaubar

1.5 Suche in Spielbäumen

Spielbäume

2-Personen-Nullsummen-Spiele

Minimax-Strategie

Pruning-Verfahren

Heuristische Verfahren

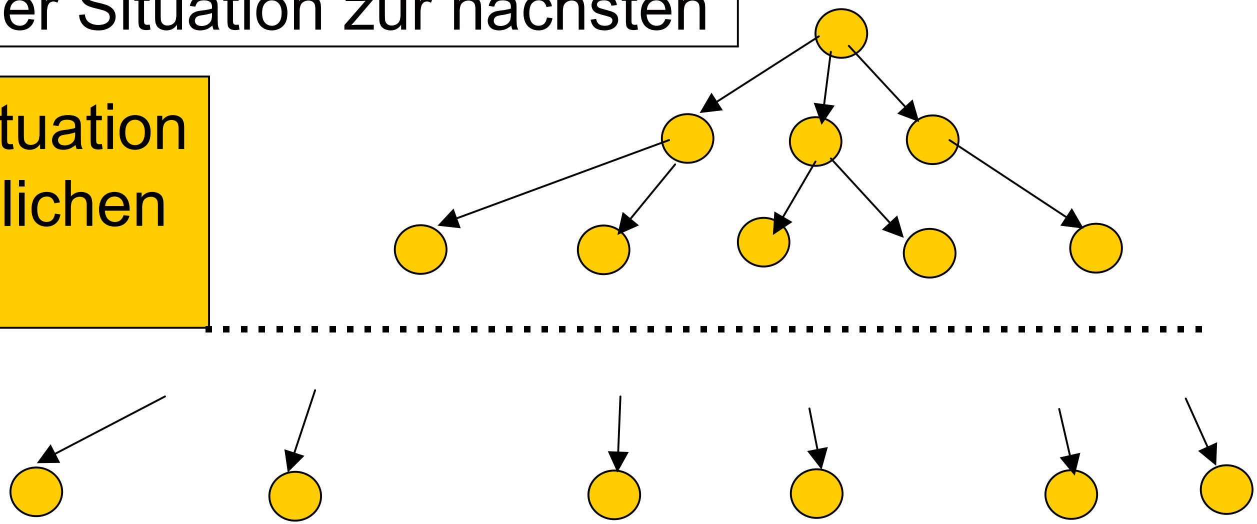
Spiele mit n Spielern P1,...,Pn

Darstellung des Spiels als Spielbaum:

- Knoten:
  mit Spielsituationen markiert
- Kanten:
  Züge von einer Situation zur nächsten

Graph schwierig zu managen

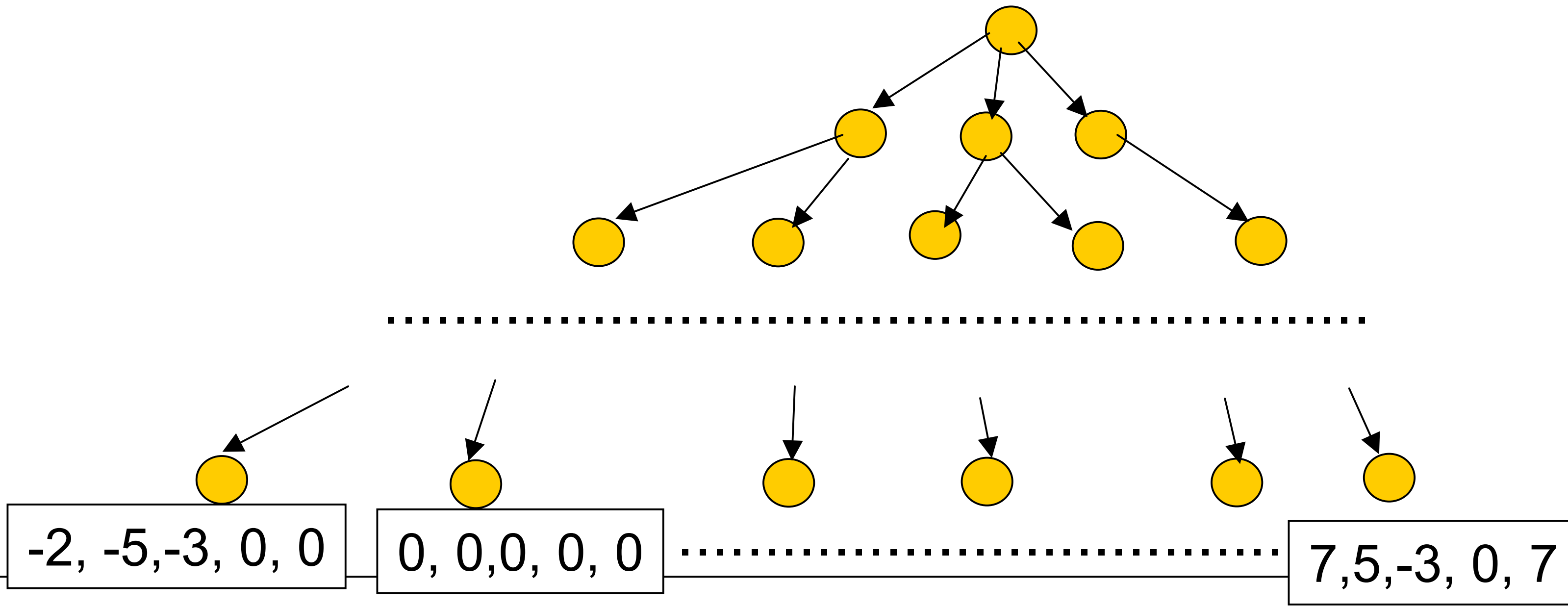
Ggf. gleiche Situation an unterschiedlichen Knoten

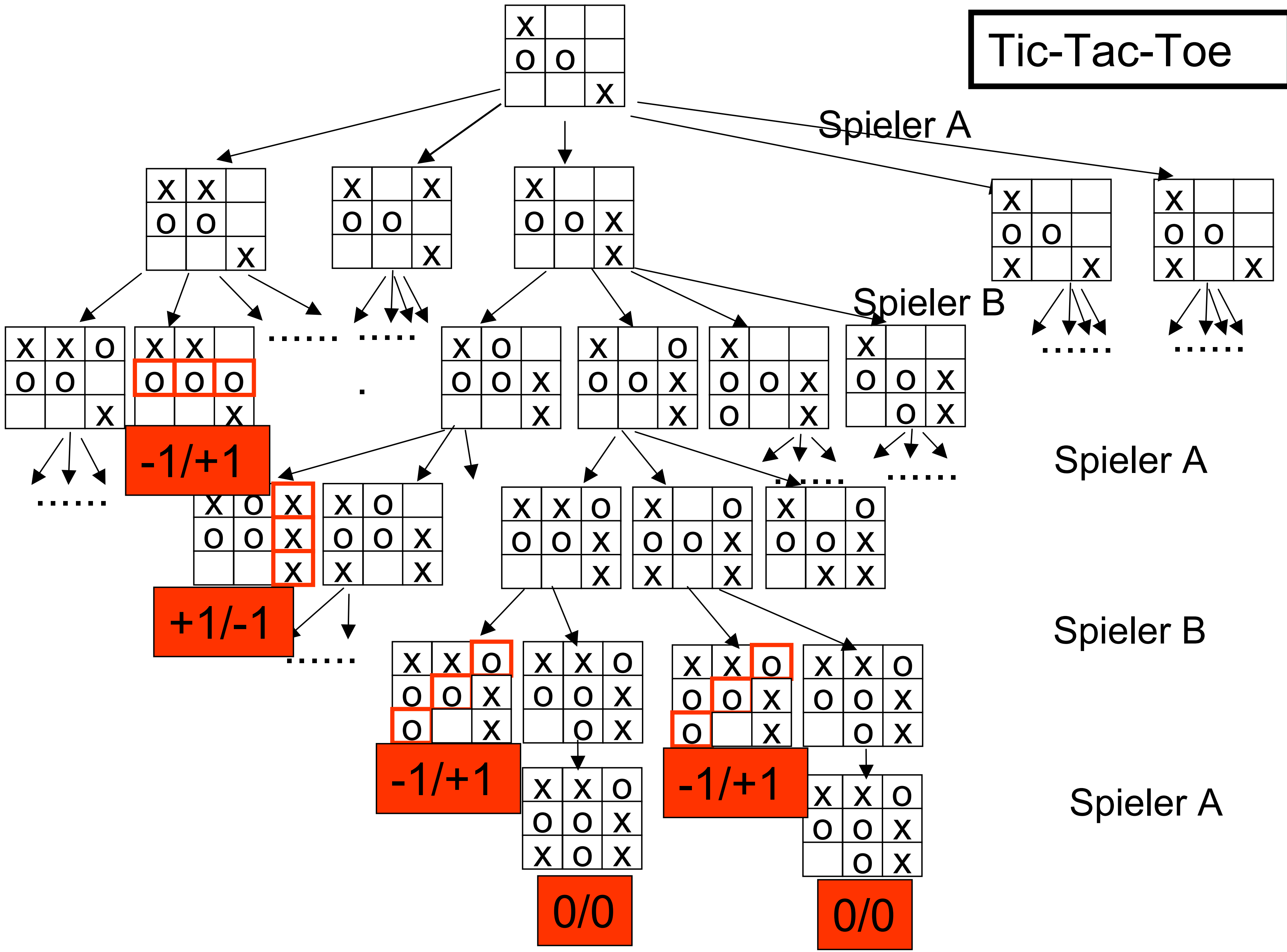


Spiele mit n Spielern P1,...,Pn

–Endknoten mit Bewertung für jeden Spieler markiert

- Positive Zahl: Gewinn
- Negative Zahl: Verlust




Tic-Tac-Toe
Spieler A
Spieler B
-1/+1
Spieler A
+1/-1
Spieler B
-1/+1
-1/+1
Spieler A
0/0
0/0

Schach

Durchschnittlich 30 Zugvarianten in jeder Situation

1. eigener Zug: 30 Nachfolgeknoten

1. gegnerischer Zug: $30^2 = 900$ Nachfolgeknoten

2. eigener Zug: $30^3 = 27000$ Nachfolgeknoten

2. gegnerischer Zug: $30^4 = 810000$ Nachfolgeknoten

...

5. gegnerischer Zug: $30^{10} \sim 6*10^{14}$ Nachfolgeknoten

...

10. gegnerischer Zug: $30^{20} \sim 3,5*10^{29}$ Nachfolgeknoten

...

Weitere Spieltypen

Spiel mit unvollständiger Information: Skat, Poker,...

Eigene Unsicherheit vermindern

Gegnerische Unsicherheit erhöhen

Emotionen modellieren

Emotionen beeinflussen

Spiel mit Zufallseinfluss: Monopoly, ...

(Würfel als „weiterer Spieler“)

Nullsummenspiel: Gewinne = –Verluste

π_i : Spielstrategie (policy) des Spielers P_i

– Vorgabe eines Zuges für jede Situation

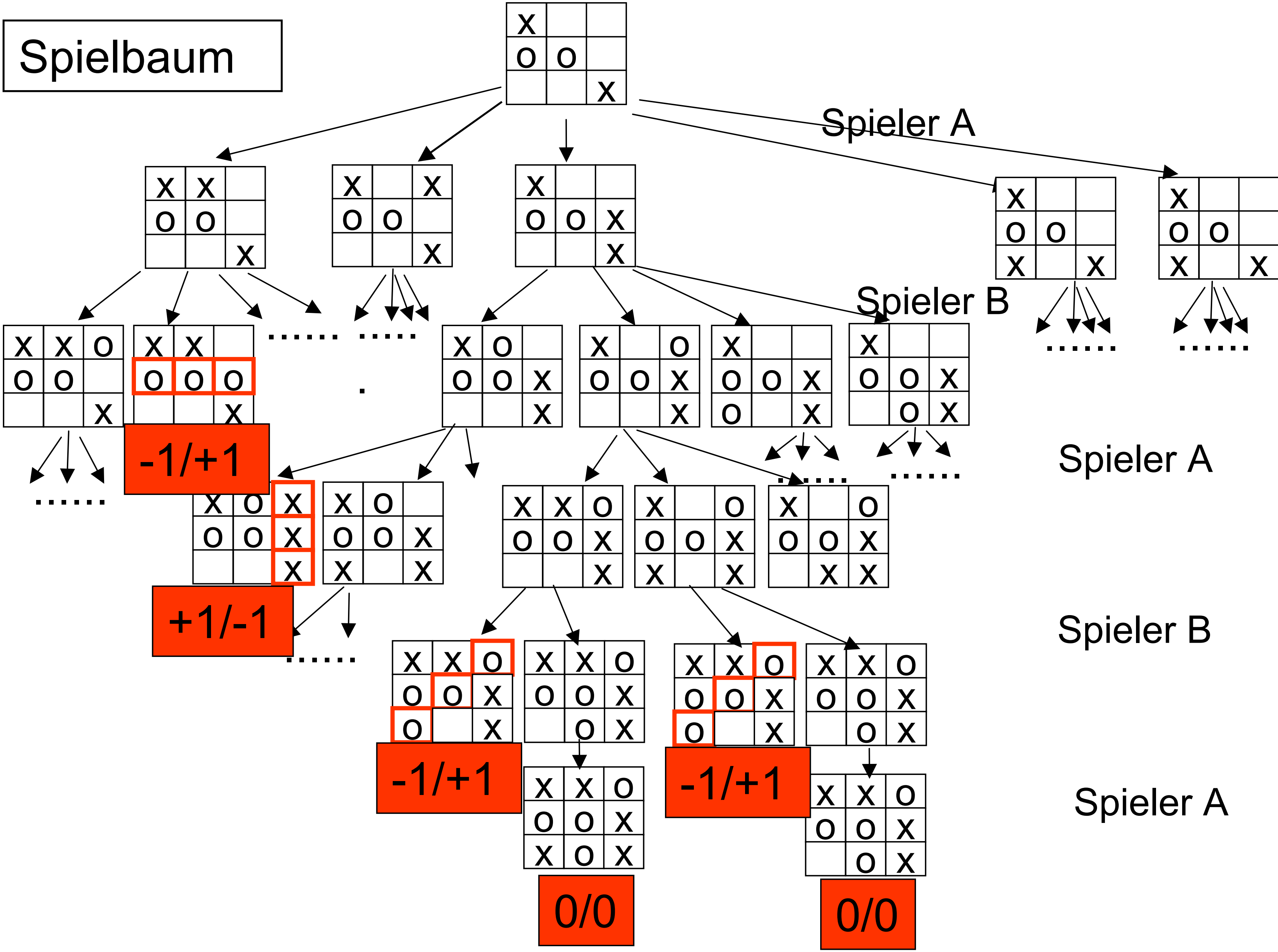
π_i : Situationen $\rightarrow$ Spielzüge des Spielers P_i

– Entspricht einem Teilbaum des Spielbaums

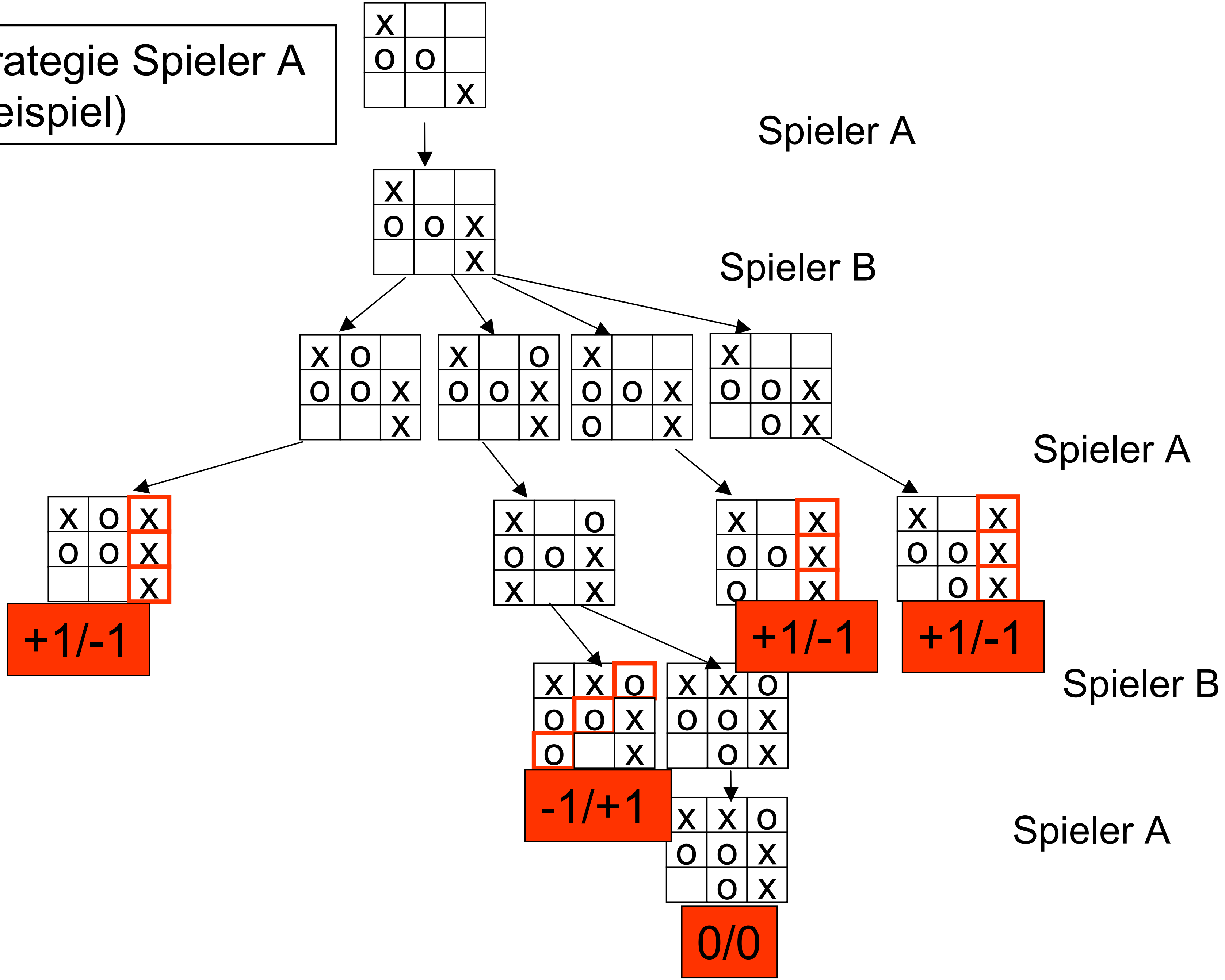
- 1 Nachfolger für den eigenen Zug gemäß Strategie
- k Nachfolger für k mögliche Züge anderer Spieler

– Spielstrategien $\pi_1,\ldots,\pi_n$ aller Spieler ergeben einen Weg im Baum zu einem Endzustand

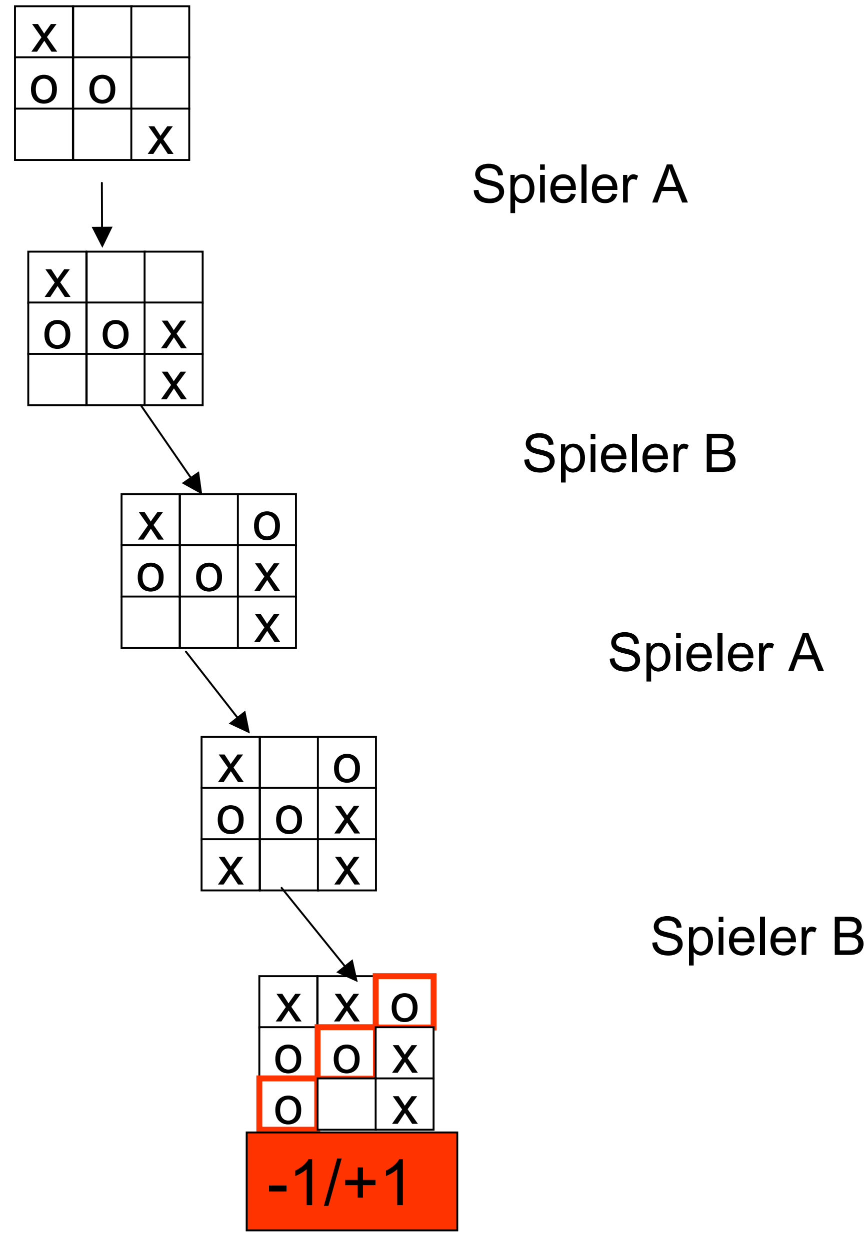
Spielbaum


Spieler A
Spieler B
Spieler A
Spieler B
Spieler A
-1/+1
+1/-1
-1/+1
-1/+1
0/0
0/0

Strategie Spieler A (Beispiel)



Zugfolge:
Strategie Spieler A
Strategie Spieler B
(Beispiel)



Gewinn/Verlust

$G_i(\pi_1,\ldots,\pi_n)$:

Gewinn/Verlust des Spielers P_i

wenn jeweils Spieler P_k die Spielstrategie π_k verwendet

Bewertung für alle Spieler als Vektor:

$$[G_1(\pi_1,\ldots,\pi_n),\ G_2(\pi_1,\ldots,\pi_n),\ \ldots.,\ \ G_n(\pi_1,\ldots,\pi_n)]$$

Gesamtheit der Bewertungen als n-dimensionale Matrix

Ausgangspunkt

- für Festlegung der eigenen Strategie (Gewinn maximieren)
- für Verhandlungen über Koalitionen

  (Problem: stabile Koalitionen)

Gefangenendilemma

Strategien: „leugnen“ oder „gestehen“

Resultatsmatrix		Spieler 2	
		gestehen	leugnen
Spieler 1	gestehen	[5,5]	[0,10]
	leugnen	[10,0]	[3,3]

Modell für Koordination

- Koalitionsbildung
- Verhandlungen etc.

- einschließlich Kooperation (Koalitionen)

  z.B. Verhandlung über Strategie-Wahl $\pi_1,...,\pi_n$ gemäß erwarteten Gewinnen $[G_1(\pi_1,...,\pi_n), ..., G_n(\pi_1,...,\pi_n)]$

- und Konflikt (Gegnerschaft)

Probleme:
Welche Werte optimieren?

- Ziele:
  - (Individuellen/Globalen) Gewinn optimieren

Modelle für Koordination

– Nash-Gleichgewicht:

Ein einzelner Spieler kann sich nicht verbessern, wenn er eine andere Strategie wählt (insbesondere ist individuelles Betrügen sinnlos).

– Pareto-Optimal:

Bei jeder anderen Wahl der Strategienmenge schneidet wenigstens ein Spieler schlechter ab (insbesondere kann kein Spieler besser abschneiden, ohne dass ein anderer schlechter abschneidet).

– Global-Optimal:

Summe über alle Gewinne optimal.

Probabilistische Modelle

Wahrscheinlichkeiten für

- Spielzustand (bei unvollst. Information)
- Zufallseinflüsse (Würfel)
- Strategien (Eigene/Gegnerische Züge)

Ergebnis als Erwartungswert

Hier nicht weiter verfolgen

⇨ Spieltheorie

⇨ Optimierung

⇨ BWL

Spielstrategien entwickeln

Im weiteren beschränken:

- 2-Personen-Nullsummenspiele
  - 2 konkurrierende Spieler A und B
  - Spieler ziehen abwechselnd
  - Gewinn(A) + Verlust(B) = 0

    Angabe für Spieler A ausreichend
- Volle Information der Spieler
- Ohne Zufall
- Deterministische Strategien

Spielbaum für diese Spiele

Darstellung analog zu Und-Oder-Baum:

- A kann Zug wählen: „Oder-Verzweigung“
- A muss auf jeden Zug von B reagieren: „Und-Verzweigung“

Bei Spielen mit Werten 1, -1 (Gewinn, Verlust)

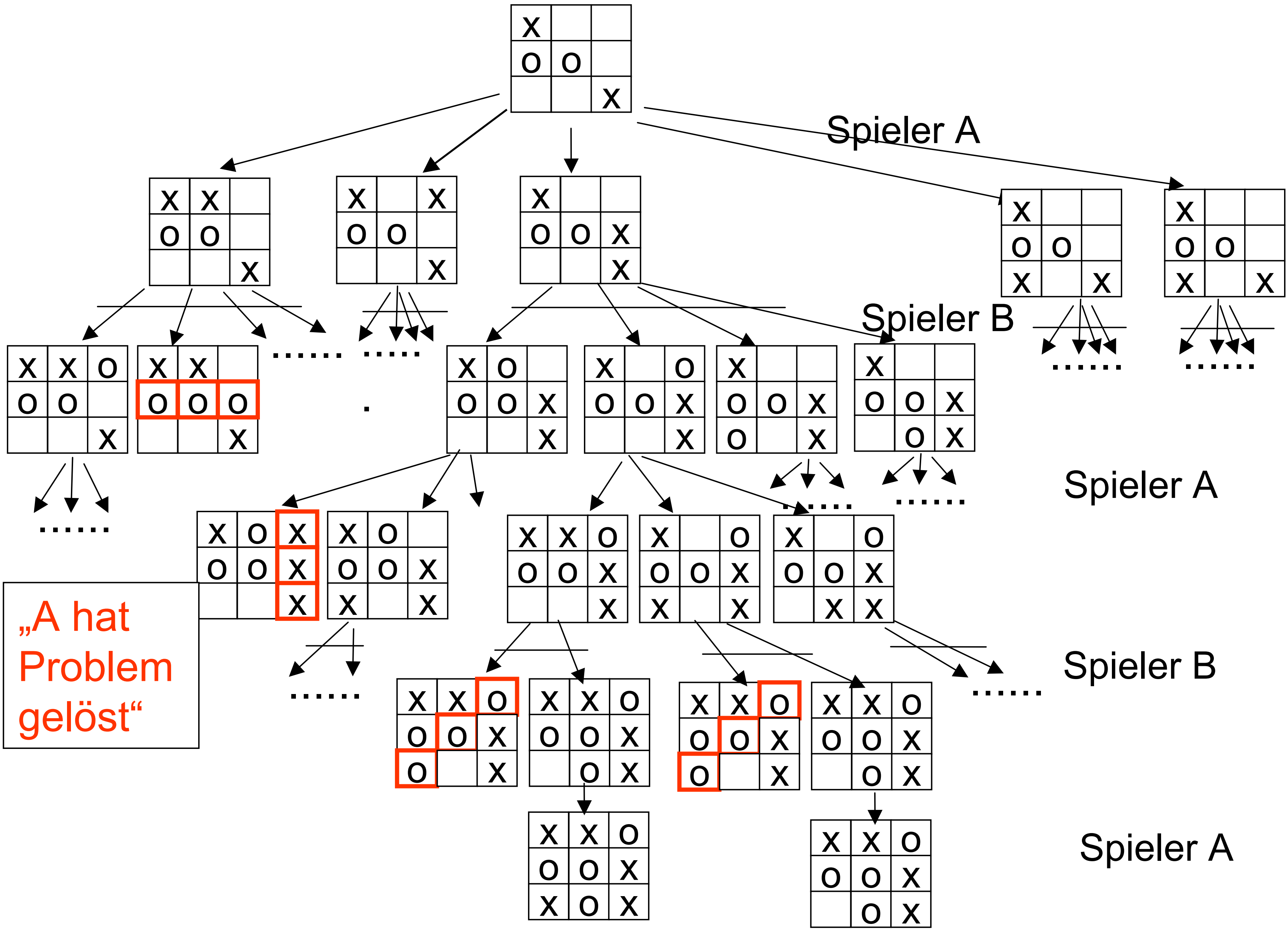
volle Analogie zu Problemzerlegung:

- lösbare Knoten: A gewinnt
- unlösbare Knoten: A verliert

evtl. auch „unentschieden“ einbeziehen

Lösungsbaum liefert Gewinn-Strategie:

- A wählt jeweils Zug zu lösbarem Knoten,
- B muß dann ebenfalls zu lösbarem Knoten ziehen.


Spieler A
Spieler B
Spieler A
Spieler B
Spieler A
„A hat Problem gelöst“

Optimalitätsannahme

Annahme: Beide Spieler spielen optimal

Mit Strategie π_A durch Spieler A erreichbarer Wert:

$G(\pi_A) := \text{Min}\{ G(\pi_A, \pi_B) \mid \pi_B \text{ Strategie für B} \}$

Im Spiel durch Spieler A erreichbarer Wert:

$G_A := \text{Max}\{ G(\pi_A) \mid \pi_A \text{ Strategie für A} \}$

Spieler A ist *Maximierer* (seines Gewinns)
Spieler B ist *Minimierer* (des Gewinns für A)

Optimale Strategie für Spieler A: π_A^* mit $G(\pi_A^*) = G_A$

Spieler A besitzt Gewinnstrategie,
falls G_A maximal möglichen Wert annimmt

Problemstellungen

- Besitzt Spieler A eine Gewinnstrategie?
- Konstruiere ggf. Gewinnstrategie für A
- Konstruiere optimale Strategie $\pi_A{}^*$

Gewinnstrategien existieren für

Wolf und Schafe (Schafe gewinnen)

Nim-Spiel (abhängig von Startsituation gewinnt A oder B)

Baumspiel (1.Spieler gewinnt immer)

Satz:

Jedes Spiel mit endlicher Baumstruktur

und nur Gewinn/Verlust

besitzt entweder eine Gewinnstrategie für A

oder eine Gewinnstrategie für B

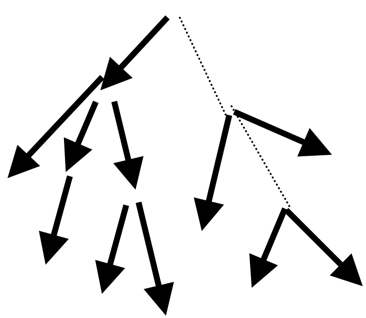
Baumspiel

Situationen: Menge von Bäumen

Start: Ein einziger Baum

Zug: Streiche einen Knoten und alle seine Vorgänger in einem Baum (übrig bleiben Teilbäume)

Gewinn: Wer letzten Baum streicht.



Wert von Spielsituationen

Welchen Zug soll Spieler als nächstes wählen?

Wert $G_A(s)$ einer Spielsituation s für Spieler A

$$G_A(s) \rightarrow \text{Gewinne}$$

$G_A(s)$:= maximaler Wert, den Spieler A von dort aus mit seiner optimalen Strategie $\pi_A{}^*$ erreichen kann

Aus G_A kann umgekehrt $\pi_A{}^*$ konstruiert werden:

In Situation s wähle Zug

zu einer Folgesituation s'

mit optimaler Bewertung $G_A(s)$

Ermitteln der Werte von Spielsituationen

Credit-Assignment-Problem:

Wert einer Situation (bzw. eines Spielzugs) ist erst am Spielende bekannt

Immerhin: Iterative Abhängigkeit der Werte

Wenn A in s zieht:

$$G_A(s) = \text{Max}\,\{G_A(s') \mid s' \text{ Nachfolgesituation von } s\}$$

Wenn B in s zieht:

$$G_A(s) = \text{Min}\,\{G_A(s') \mid s' \text{ Nachfolgesituation von } s\}$$

Bei bekanntem Spielbaum:
Bottom-Up-Konstruktion der Werte im Spielbaum

Minimax-Verfahren

Lernen der Werte von Spielsituationen

Immerhin: Iterative Abhängigkeit der Werte

Wenn A in s zieht:

$$G_A(s) = \text{Max}\ \{G_A(s') \mid s' \text{ Nachfolgesituation von } s\ \}$$

Wenn B in s zieht:

$$G_A(s) = \text{Min}\ \{G_A(s') \mid s' \text{ Nachfolgesituation von } s\}$$

Bei unbekanntem Spielbaum:

- Exploration
  (Erkunden von Möglichkeiten, d.h. Spielzüge ausprobieren)
- Sukzessives Verbessern der Bewertungen

„Reinforcement-Lernen“

Minimax-Verfahren

Voraussetzungen:

– Endlicher Spielbaum
– Endknoten mit Resultaten für Spieler A markiert

(1)Falls Startknoten markiert:

Exit: Wert der optimalen Strategie π_A^* = Wert(Startknoten)

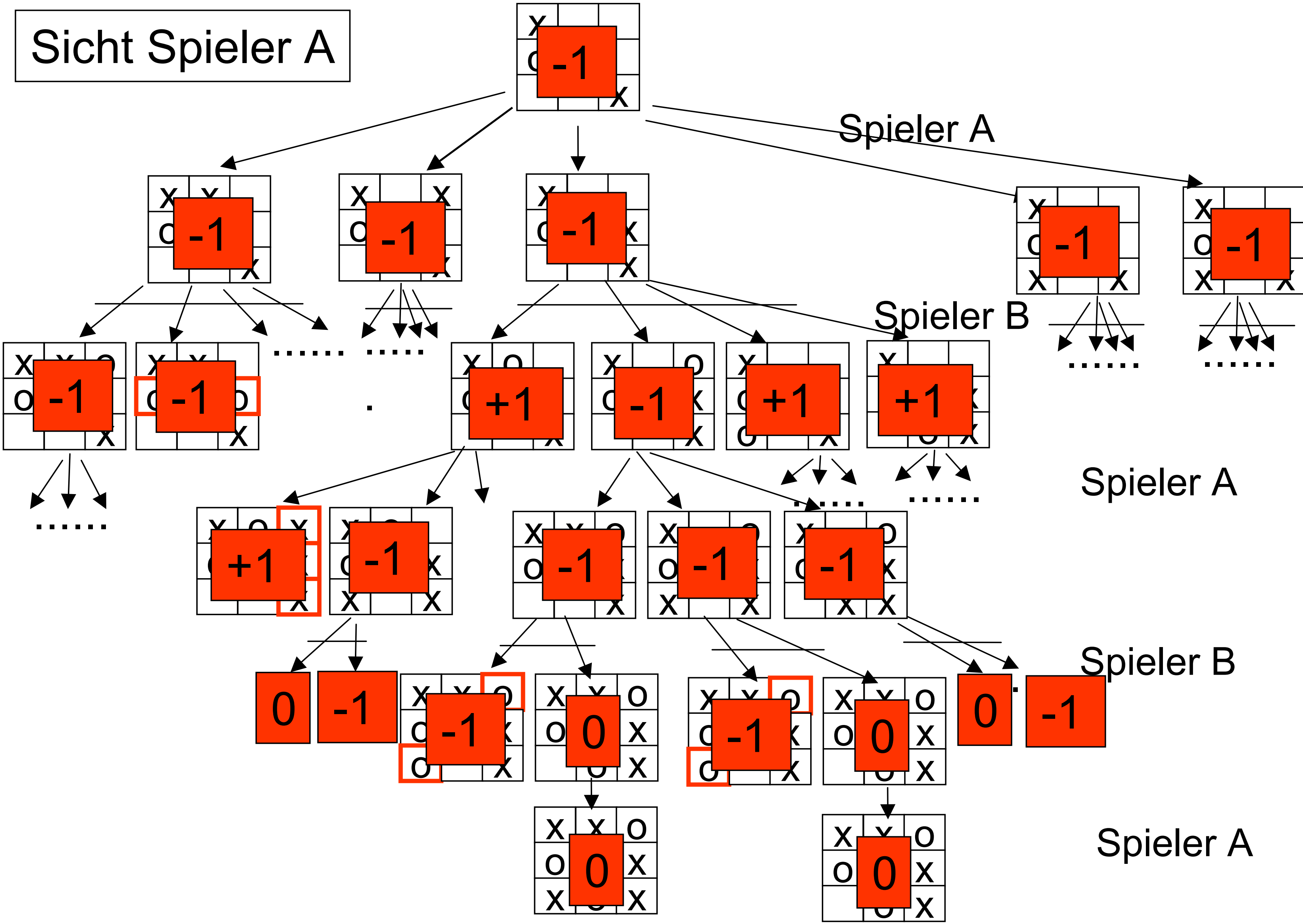
(2)Wähle unmarkierten Knoten k, dessen Nachfolger markiert sind

Wenn A in k zieht: Wert(k):=Max{Wert(k´) | k´ Nachfolger von k }

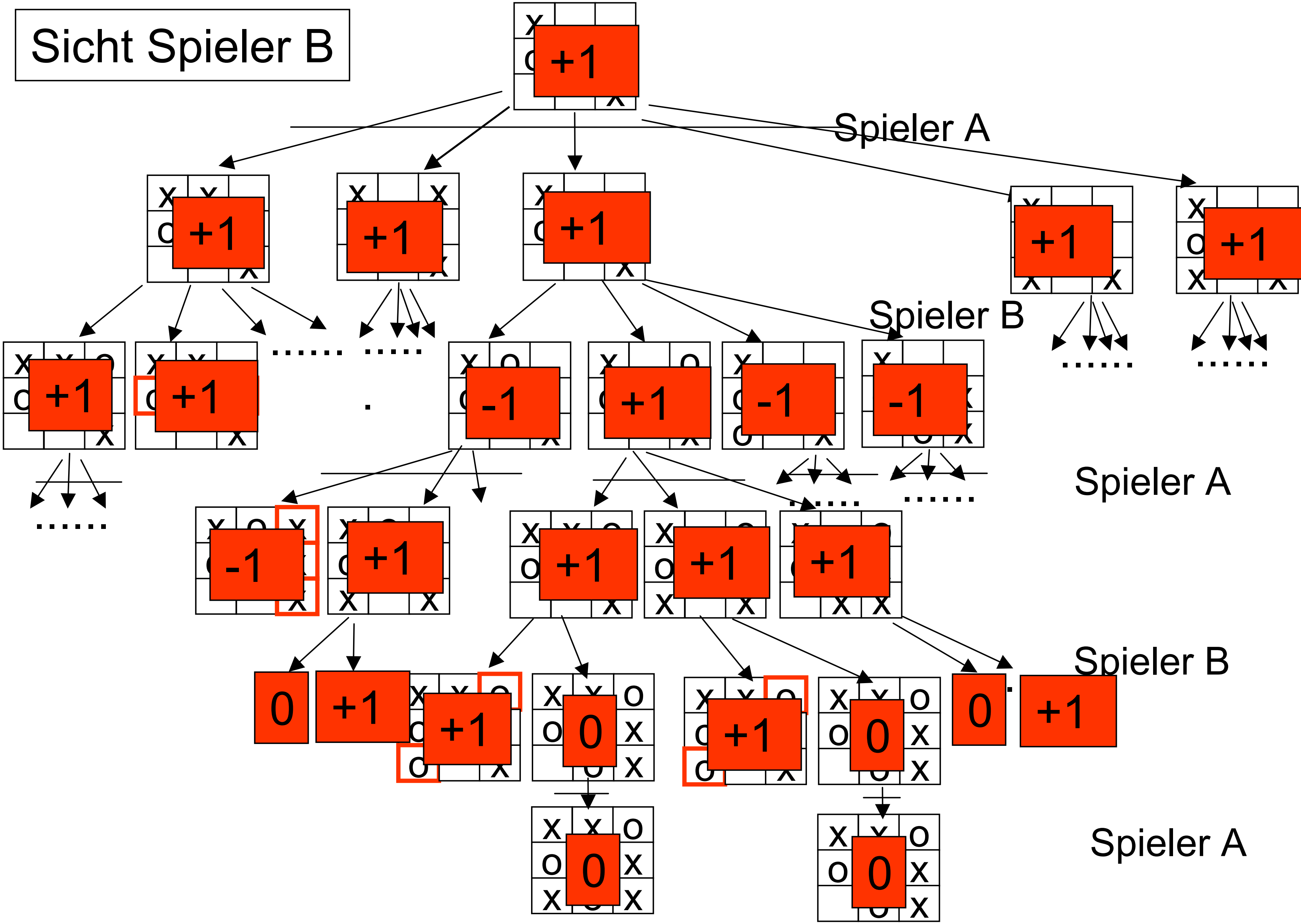
Wenn B in k zieht: Wert(k):=Min{Wert(k´) | k´ Nachfolger von k }

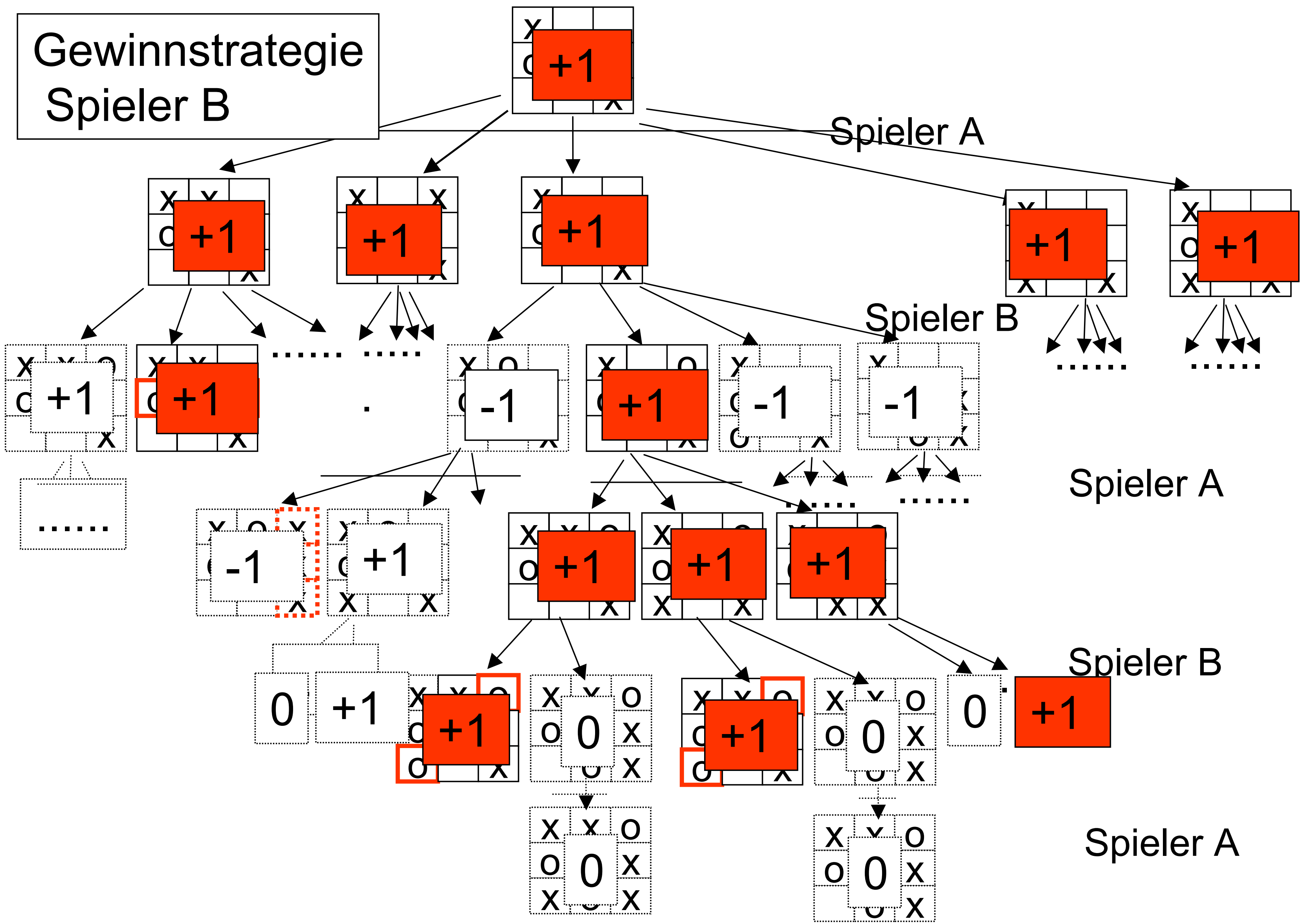
Weiter bei (1).

Sicht Spieler A



Sicht Spieler B

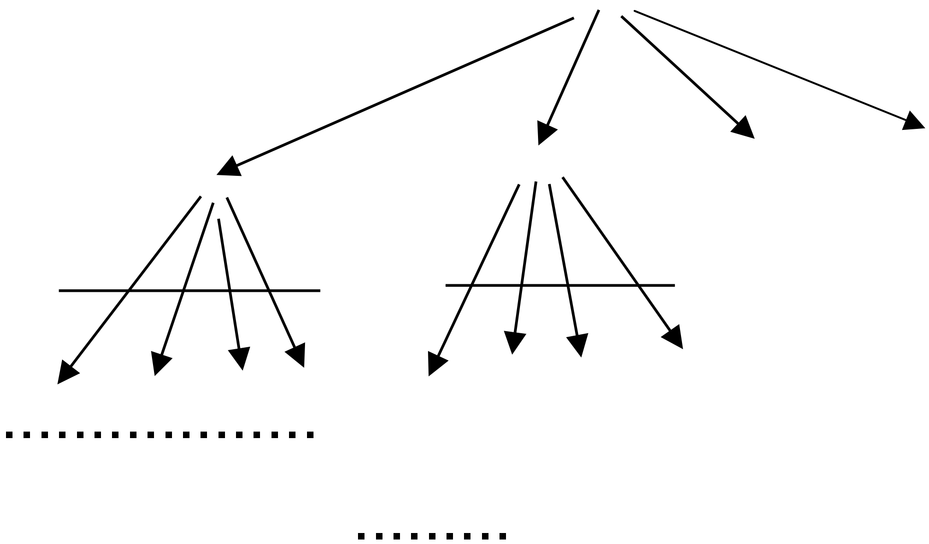




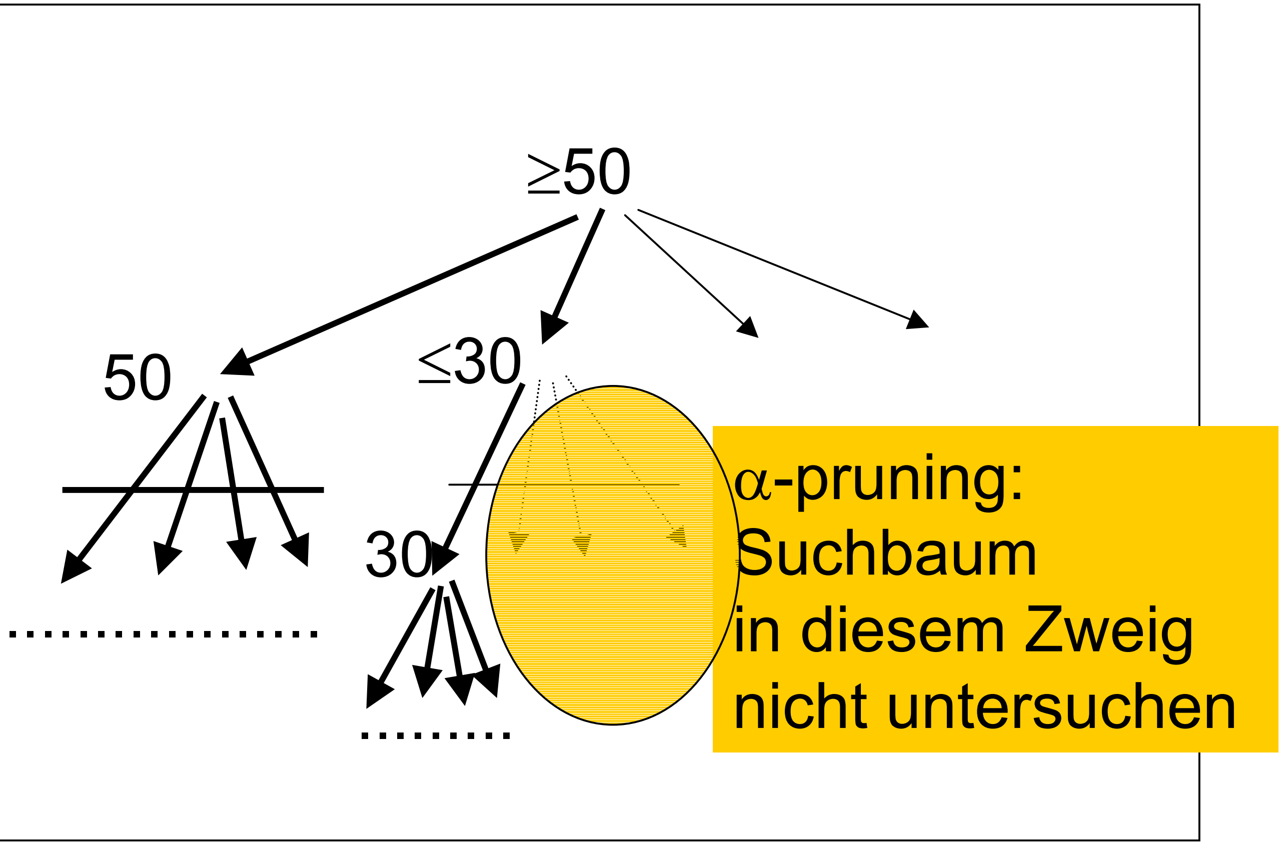
Gewinnstrategie Spieler B
Spieler A
Spieler B
Spieler A
Spieler B
Spieler A
+1
-1
0
......

Züge ausschließen: Pruning-Strategien

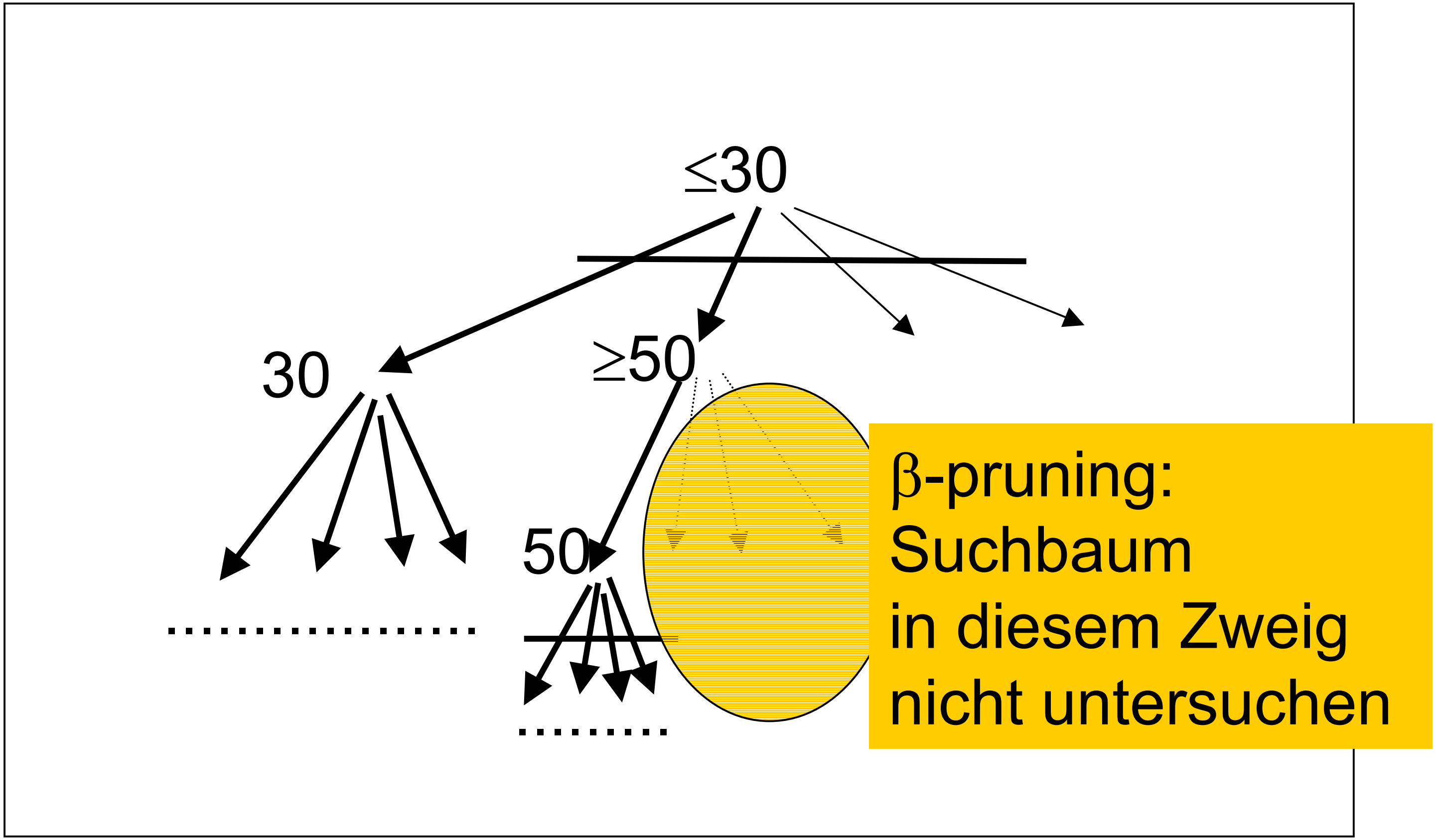
Idee: Wenn es bereits bessere Varianten gibt, müssen schlechtere nicht weiter verfolgt werden



α-pruning (Züge von A ausschließen)



β-pruning (Züge von B ausschließen)



Effizienz von Pruning-Strategien

abhängig von der Reihenfolge:

- im ungünstigsten Fall keine Einsparung:

  Es bleibt bei b^d Endknoten für Verzweigungsfaktor b, Tiefe d

- im günstigsten Fall („beste Züge jeweils links“):

  Aufwand ungefähr $2 * b^{(d/2)}$

$2 * b^{(d/2)} - 1$	für gerade d,
$b^{((d+1)/2)} + b^{((d-1)/2)} - 1$	für ungerade d.

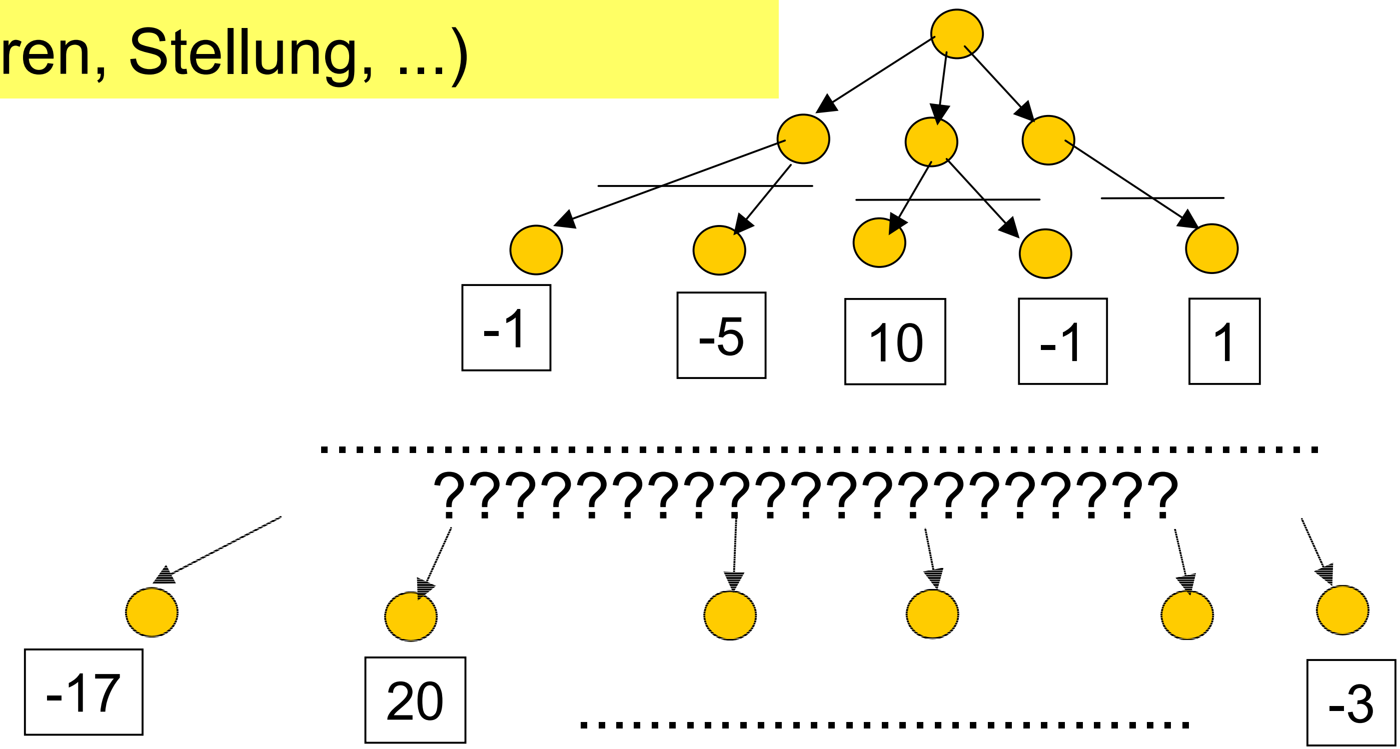
d.h. Doppelte Suchtiefe mit gleichem Aufwand möglich

Weitere Verfahren
zur Auswahl günstiger Expansionsreihenfolge

Heuristische Suche

1. Spielbaum teilweise entwickeln von aktueller Situation ausgehend

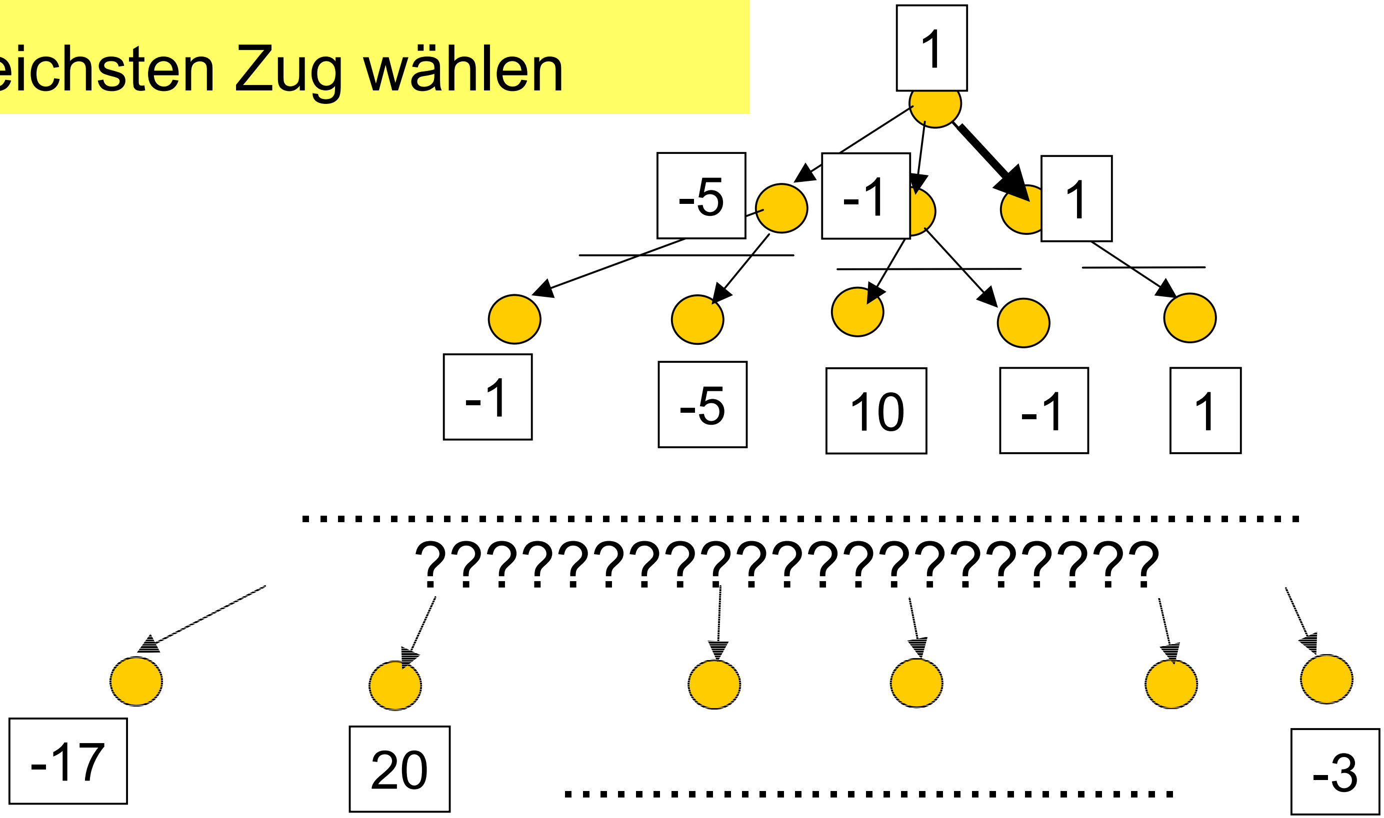
2. dort Situationen *statisch* bewerten (z.B. Figuren, Stellung, ...)



Heuristische Suche

3. gefundene Werte *dynamisch* gemäß Minimax zurückverfolgen

4. aussichtsreichsten Zug wählen



Woher kommen Bewertungen?

Statische Bewertung von Situationen:

- Analogie zu Schätzfunktionen
- Vorhersage des erreichbaren Gewinns

Bauer:	1
Läufer, Springer:	3
Turm:	5
Dame:	9
Bauernstellung:	0,5
Königsstellung:	0,5

Unterschiedliche Bewertungsfaktoren

Verdichtung zu einer Zahl, z.B. gewichtete Summe

Lernen von Gewichten anhand von Beispielen

Bis zu welcher Tiefe entwickeln?

Horizont-Effekt:

- bei Abbruch in „unruhiger Situation“ falsche Bewertung

- Ausweg:
  - keine feste Tiefenbeschränkung,
  - in unruhigen Situationen weiterentwickeln (umgekehrt: in eindeutig schlechten Situationen frühzeitig abbrechen)

- *alpha-beta-pruning*