

## Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 27. Januar 2011

### Aufgabe 50

*mündlich*

Zeigen Sie, dass die Varianz für paarweise stochastisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  additiv ist:  $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$ .

### Aufgabe 51

*mündlich*

Eine NP-Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  hat *selfcomputable witnesses* ( $A \in \text{SCW}$ ), falls ein Polynom  $p$ , eine  $p$ -balancierte Sprache  $B \in \mathbf{P}$  und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer  $M$  existieren mit

- $A = \exists B$ , d.h.  $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : x\#y \in B$ ,
- für jede Eingabe  $x \in A$  erzeugt  $M^A$  eine Ausgabe  $M^A(x)$  der Länge  $p(|x|)$  mit  $x\#M^A(x) \in B$ .

Wir sagen auch,  $M^A$  berechnet eine witness-Funktion für  $A$  (bzgl.  $B$ ). Zeigen Sie:

- (a)  $\text{SAT} \in \text{SCW}$ .
- (b)  $\text{NPC} \subseteq \text{SCW}$ , d.h. jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
- (c) Jede Sprache  $A \in \text{PSK} \cap \text{SCW}$  hat eine witness-Funktion in  $\text{PSK}$ , d.h. es existieren ein Polynom  $p$ , eine  $p$ -balancierte Sprache  $B \in \mathbf{P}$  und eine Folge  $C_n$  von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit  $n$  Eingängen und  $p(n)$  Ausgängen, so dass für alle  $n$  und alle  $x \in A$  der Länge  $n$  gilt:  $x\#C_n(x) \in B$ .

- (d)  $\text{PSK} \cap \text{SCW} \subseteq \text{NP}(\text{NP})$ ,
- (e)  $\text{NP}(\text{NP}(\text{PSK} \cap \text{SCW})) = \text{NP}(\text{NP})$ ,
- (f)  $\text{SAT}$  ist nicht in  $\text{PSK}$  enthalten, außer wenn  $\text{PH}$  auf  $\Sigma_2^P$  kollabiert.

### Aufgabe 52 Zeigen Sie:

*mündlich*

- (a)  $\#P \subseteq \text{FP}(\text{PP})$ ,
- (b)  $\oplus P \subseteq \text{P}(\text{PP})$ ,
- (c)  $\oplus P(\oplus P) = \oplus \cdot \oplus \cdot P = \oplus P$ ,
- (d)  $\text{BPP}(\text{BPP}) = \text{BP} \cdot \text{BP} \cdot P = \text{BPP}$ ,
- (e)  $\text{PP}(\text{BPP}) = P \cdot \text{BP} \cdot P = \text{PP}$ .

### Aufgabe 53

**10 Punkte**

Eine Funktion  $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \rightarrow \Sigma^*$  heißt *und-Funktion* für eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$ , falls für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$f(x\#y) \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* ist analog definiert. Sei  $\mathbf{C}$  eine unter  $\leq_m^{\text{log}}$ -Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei  $A$  ein  $\mathbf{C}$ -vollständiges Problem. Zeigen Sie:

- (a)  $\mathbf{C}$  ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn  $A$  eine und-Funktion in  $\text{FL}$  hat.
- (b)  $\text{SAT}$  und  $\text{GI}$  haben und- und oder-Funktionen in  $\text{FL}$ .
- (c)  $\text{GA}$  hat eine oder-Funktion in  $\text{FL}$ .
- (d)  $\text{NP}$ ,  $\text{co-NP}$  und  $\text{NP} \cap \text{co-NP}$  (sowie alle Stufen von  $\text{PH}$ ) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
- (e)  $\text{NP} \cup \text{co-NP}$  ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn  $\text{NP} = \text{co-NP}$  ist.