

Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 22. Januar 2009

Aufgabe 48

mündlich

Überlegen Sie, wie sich durch geeignete Einschränkung von QBF vollständige Probleme für die Stufen der Polynomialzeithierarchie ableiten lassen.

Aufgabe 49

mündlich

Zeigen Sie, dass alle Stufen der Polynomialzeithierarchie unter majority-Reduktionen abgeschlossen sind.

Aufgabe 50 Zeigen Sie:

mündlich

- (a) Falls \mathcal{C} unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann auch unter disjunktiven Reduktionen.
- (b) Falls \mathcal{C} unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $R \cdot \mathcal{C}$ unter dem R-Operator abgeschlossen.
- (c) Falls \mathcal{C} unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\exists \cdot \forall \cdot \text{BP} \cdot \mathcal{C} = \exists \cdot \forall \cdot \mathcal{C}$.
- (d) Aus $\text{NP} \subseteq \text{BPP}$ folgt $\text{PH} = \Sigma_2^p$.

Aufgabe 51

mündlich

Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten ist. Bezeichne TURNIER die Menge aller Turniergraphen und bezeichne DIRGI das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

- (a) DIRGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt $\text{DIRGI} \equiv_m^{\log} \text{GI}$.
- (b) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen $\text{TURNIER} \cap \text{DIRGI}$ liegt in $\oplus\text{P}$.

Aufgabe 52

10 Punkte

Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt *und-Funktion* für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x\#y) \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A.$$

Der Begriff der *oder-Funktion* ist analog definiert. Sei \mathcal{C} eine unter \leq_m^{\log} -Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein \mathcal{C} -vollständiges Problem. Zeigen Sie:

- (a) \mathcal{C} ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn A eine und-Funktion in FL hat.
- (b) SAT und GI haben und- und oder-Funktionen in FL.
- (c) GA hat eine oder-Funktion in FL.
- (d) NP, coNP und $\text{NP} \cap \text{coNP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
- (e) $\text{NP} \cup \text{coNP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\text{NP} = \text{coNP}$ ist.