Übungsblatt 6

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 29. 11.–2. 12. 2022
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 29. 11. 2022, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. 12. 2022, 23:59 Uhr

Aufgabe 33 Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und für $i \geq 0$ sei ***mündlich***

$$D_i = \Big\{\{p, q\} \subseteq Z \mid p \text{ und } q \text{ haben einen Unterscheider } x \text{ der Länge } |x| \leq i\Big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die durch $p \sim_i q \Leftrightarrow \{p, q\} \notin D_i$ auf Z definierten Relationen $\sim_i$ Äquivalenzrelationen sind und $\sim_{i+1}$ eine Verfeinerung von $\sim_i$ ist (d.h. $\sim_{i+1}$ bewirkt eine feinere Partitionierung von Z als $\sim_i$).

(b) Schätzen Sie die Zahl $k = \min\{i \geq 0 \mid D_{i+1} = D_i\}$ in Abhängigkeit von $m = \|Z\|$ möglichst gut nach oben ab.

(c) Zeigen Sie, dass Ihre Schranke für k scharf ist, d.h. geben Sie für jede Anzahl von Zuständen m einen DFA M_m an, sodass k gleich Ihrer Schranke ist.

Aufgabe 34 ***9 Punkte***

Die folgenden Sprachen sind nicht regulär. Beweisen Sie dies, indem Sie jeweils unendlich viele bzgl. der Nerode-Relation $\sim_L$ paarweise nicht äquivalente Wörter angeben und deren Nichtäquivalenz zeigen.

(a) $L_1 = \big\{w \in \{a, b\}^* \,\big|\, \#_a(w) \text{ teilt } \#_b(w)\big\}$. *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{a^{2n}b^m \mid n \geq m \geq 0\}$. *(3 Punkte)*

(c) $L_3 = \big\{wa^n \,\big|\, w \in \{a, b\}^* \text{ und } n \geq \#_a(w)\big\}$. *(3 Punkte)*

(d) $L_4 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, *(3 Punkte)*

Aufgabe 35 Folgende Aussagen haben die Form „Wenn A, dann B“. ***mündlich***

Geben Sie die (äquivalente) *Kontraposition* „Wenn nicht B, dann nicht A“ an. Formen Sie dabei die Aussagen „nicht B“ und „nicht A“ so um, dass die Negation möglichst weit hinten auftritt.

(a) Wenn L regulär ist, gibt es einen DFA M mit $L(M) = L$.

(b) Wenn für alle $(a, b), (b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ gilt, ist R transitiv.

Aufgabe 36 Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$. ***9 Punkte***

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $aaabb$ in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. *(7 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Pumpingzahl für L. *(2 Punkte)*

Aufgabe 37 ***mündlich***

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache
$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \,\middle|\, \#_a(w) \text{ teilt } \#_b(w) \right\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 38 ***mündlich***

Betrachten Sie die folgenden **falschen** „Beweise“, die das Pumping-Lemma anwenden, und entscheiden Sie wo jeweils der Fehler liegt.

(a) Die Sprache $L = \left\{ 0^n 1^n \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$ ist nicht regulär, da sie das Pumping-Lemma nicht erfüllt. Angenommen L würde das Pumping-Lemma erfüllen, dann müssen wir das Wort $x = 000111 \in L$ nach den Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas zerlegen können. Angenommen $x = uvw$ ist eine solche Zerlegung mit $|uv| \leq l$ und $v \neq \varepsilon$. Wegen $|uv| \leq l$ muss uv komplett in den 0en von x enthalten sein und wegen $v \neq \varepsilon$ muss v mindestens eine 0 enthalten. Dann enthält uv^2w mindestens vier 0en, aber nur drei 1en, also $uv^2w \notin L$. Somit erfüllt L das Pumping-Lemma nicht und L ist nicht regulär.

(b) Die Sprache $L = \left\{ 0^{2n} \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$ ist nicht regulär, da sie das Pumping-Lemma nicht erfüllt. Angenommen L wäre regulär, dann gibt es eine Pumpingzahl l für L. Betrachte das Wort $x = 0^{2l} \in L$ und die Zerlegung $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0$ und $w = 0^{2l-1}$. Diese Zerlegung erfüllt die ersten beiden Bedingungen $|uv| \leq l$ und $v \neq \varepsilon$. Mit dieser Zerlegung gilt aber $uv^2w = 0^{2l+1} \notin L$, da die Länge von uv^2w ungerade ist. Somit erfüllt L das Pumping-Lemma nicht und L ist nicht regulär.

Aufgabe 39 ***12 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $L = \left\{ a^{2n} b^m \,\middle|\, n \geq m \geq 0 \right\}$.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $x = a^6 b^2 = aaaaaabb$ in Teilwörter $x = uvw$ an, die für $l = 6$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L dennoch nicht regulär ist. *(7 Punkte)*