

Übungsblatt 14

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 4.–8. 2. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 13. 2. 2013

Aufgabe 108 Zeigen Sie: *mündlich*

- (a) Eine Sprache A ist genau dann NP-vollständig, wenn ihr Komplement \bar{A} vollständig für co-NP ist. *(mündlich)*
- (b) SAT liegt genau dann in co-NP, wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist. *(mündlich)*
- (c) Die Sprache UNSAT der unerfüllbaren booleschen Formeln ist co-NP-vollständig (d. h. $\text{UNSAT} \in \text{co-NPC}$). *(mündlich)*
- (d) Die Sprache TAUT der aussagenlogischen Tautologien ist ebenfalls vollständig für co-NP. *(mündlich)*

Aufgabe 109 Zeigen Sie: *mündlich*

- (a) $E \subseteq \text{DTIME}(2^{n^2})$,
- (b) $E \not\subseteq \text{EXP}$. (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass die Diagonalsprache $D = \{w \mid M_w \text{ ist eine DTM, die } w \text{ in höchstens } 2^{|w|^2} \text{ Schritten verwirft}\}$ in $\text{EXP} \setminus \text{DTIME}(2^{n^2})$ liegt.)

Aufgabe 110 Zeigen Sie: *mündlich, optional*

- (a) Jede Sprache $A \in \text{DTIME}(t(n))$ ist in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0, 1\}^*$ in $\text{DTIME}(\mathcal{O}(t(n)))$ reduzierbar.
- (b) Die Sprache

$$L = \left\{ w \# x \# \text{bin}(m) \mid \begin{array}{l} x \in \{0, 1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine DTM, die} \\ x \text{ in höchstens } m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

ist EXP-vollständig ($\text{bin}(m)$ bezeichne die Binärdarstellung von m).

- (c) Der Abschluss von E unter \leq^p ist EXP (d. h. $\text{EXP} = \{A \mid \exists B \in E : A \leq^p B\}$).
- (d) E ist nicht unter \leq^p abgeschlossen (also ist $\text{P} \not\subseteq E$ und $E \neq \text{NP}$).
- Hinweis*: Verwenden Sie die Separation $E \not\subseteq \text{EXP}$ (siehe [Aufgabe 109](#)).

Aufgabe 111 *5 Punkte*

Eine boolesche Formel F heißt **monoton**, falls sie nur mittels \vee und \wedge aus Variablen und Konstanten $(0, 1)$ aufgebaut ist.

Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) $L_1 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare monotone Formel}\}$, *(mündlich)*
- (b) $L_2 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \rightarrow H\}$, *(mündlich)*
- (c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \rightarrow H\}$, *(mündlich)*
- (d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$, *(mündlich)*
- (e) $L_5 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 112

10 Punkte

- (a) Überlegen Sie, wie sich ein gegebener regulärer Ausdruck α in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA M transformieren lässt. *(mündlich)*
- (b) Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie. *(mündlich)*
- LP_{DFA} (das Leerheitsproblem für DFAs),
 - SP_{DFA} (das Schnittproblem für DFAs),
 - IP_{DFA} (das Inklusionsproblem für DFAs),
 - AP_{DFA} (das Ausschöpfungsproblem für DFAs),
 - ÄP_{DFA} (das Äquivalenzproblem für DFAs).
- (c) Welche Klassifikation ergibt sich, wenn die regulären Sprachen nicht durch einen DFA, sondern durch einen (sternfreien) regulären Ausdruck oder durch einen NFA beschrieben werden? Begründen Sie. *(10 Punkte)*

Aufgabe 113

15 Punkte

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

- (a) Das Subgraph-Isomorphieproblem SUBGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H , ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist. *(3 Punkte)*
- (b) Das 2-Färbbarkeitsproblem 2-COLORING. *(3 Punkte)*
- (c) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k , ob G eine Clique der Größe k hat und G k -färbbar ist. *(3 Punkte)*
- (d) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k , ob G eine Clique der Größe $k + 1$ hat und G k -färbbar ist. *(3 Punkte)*
- (e) Entscheide für einen Graphen G und eine gegebene Clique C in G , ob C die einzige Clique der Größe $\|C\|$ in G ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 114 Zeigen Sie:

10 Zusatzpunkte

- (a) NP ist unter \cup , \cap , Produkt und Sternhülle abgeschlossen. *(mündlich, optional)*
- (b) Auch P ist unter diesen Operationen abgeschlossen. *(10 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Orientieren Sie sich an der beim CYK-Algorithmus benutzten dynamischen Programmieretechnik, um zu zeigen, dass P unter Sternhülle abgeschlossen ist.