

Übungsblatt 6

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 29.11.–2.12.2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 7.12.2016*

Essentielle Begriffe: Grammatiken, Typ- i -Sprachen, CFL, Pumpinglemma (für kontextfreie Sprachen)

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 42; 43; 44

Aufgabe 39 Seien Σ und Γ beliebige Alphabete. **mündlich, optional**
Eine Funktion $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ heißt *Homomorphismus*, falls $h(\varepsilon) = \varepsilon$ und für alle $x_1 \dots x_n \in \Sigma^+$ gilt: $h(x_1 \dots x_n) = h(x_1) \dots h(x_n)$, d.h. h ersetzt Zeichen aus Σ durch Wörter aus Γ^* . Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$. Zeigen Sie:

- (a) REG ist unter Homomorphismen abgeschlossen, d.h. für reguläres $L \subseteq \Sigma^*$ und einen Homomorphismus $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ ist auch $h(L)$ regulär.
(*Hinweis:* Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck oder ENFA.)
- (b) Auch CFL und RE sind unter Homomorphismen abgeschlossen.
(*Hinweis:* Ersetzen Sie die Terminale in Grammatiken.)
- (c) Zeigen Sie, dass $L = \{(bc)^n c^m a^n \mid n \geq 2, m \leq n\}$ nicht regulär ist, indem Sie nur Abschlusseigenschaften und $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$ nutzen.

Aufgabe 40 Seien A, B beliebige Typ- i -Sprachen ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$). **mdl., opt.**
Zeigen Sie, dass dann auch $A^R, A \cup B, AB, A^*$ und A^+ Typ- i -Sprachen sind.

Aufgabe 41 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie. **mündlich**

- (a) $A \in \text{CFL} \Rightarrow A^* \in \text{REG}$,
- (b) $A, C \in \text{REG}$ und $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow B \in \text{REG}$,
- (c) $A \in \text{CFL}$ und $A \subseteq B \not\Rightarrow B \notin \text{REG}$,
- (d) Wenn $A, B \in \text{REG}$, dann ist $A \triangle B$ (symmetrische Differenz) regulär.

Aufgabe 42 Zeigen Sie unter Nutzung des Pumping-Lemmas: **12 Punkte**

- (a) $L_1 \notin \text{REG}$, wobei $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, *(mündlich)*
- (b) $L_2 \notin \text{REG}$, wobei $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m > 0\}$. *(12 Punkte)*

Aufgabe 43 Sei $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}$.

6 Punkte

Zeigen Sie wie folgt, dass die Umkehrung des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen im Allgemeinen falsch ist:

- (a) Zeigen Sie, dass L_1 eine endliche Pumpingzahl l hat. Wie groß ist l ? (mündlich)
- (b) Zeigen Sie, dass L_1 (dennoch) nicht regulär ist. (mündlich)

Weiter sei $L_2 = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ oder } j = k = l\}$.

- (c) Zeigen Sie (wie in (a) und (b)) mittels L_2 , dass die Umkehrung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen im Allgemeinen falsch ist. (6 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen bereits benutzen, dass für Sprachen $A \in \text{CFL}$ und $B \in \text{REG}$ die Sprache $A \cap B$ kontextfrei ist. Dies wird erst auf Blatt 8 (unter Nutzung von Kellerautomaten) gezeigt.

Aufgabe 44 Betrachten Sie den untenstehenden DFA M .

12 Punkte

- (a) Geben Sie für M eine äquivalente reguläre Grammatik an. (6 Punkte)

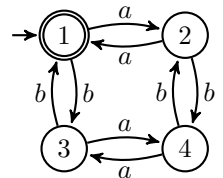
- (b) Geben Sie für die reguläre Grammatik $G = (\{A, B\}, \{a, b\}, P, A)$ mit den Regeln

$$P: A \rightarrow aB, a, \varepsilon$$

$$B \rightarrow bA, b$$

einen äquivalenten NFA an.

(6 Punkte)



Benutzen Sie jeweils das Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 45 Eine linksreguläre Grammatik darf nur Regeln

mündlich

der Bauart $A \rightarrow a$, $A \rightarrow Ba$ oder $A \rightarrow \varepsilon$ enthalten. Der Begriff rechtsregulär ist analog definiert, entspricht also der Vorlesungsdefinition einer regulären Grammatik.

Gegeben sei die Grammatik

$$G_1 = (\{S, T\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS, abT; T \rightarrow aT, abS, ab\}, S).$$

- (a) Geben Sie einen regulären Ausdruck sowie eine links- und eine rechtsreguläre Grammatik für die Sprache $L(G_1)$ an.
- (b) Zeigen Sie allgemein, dass eine Sprache genau dann von einer linksregulären Grammatik erzeugt wird, wenn es eine rechtsreguläre Grammatik für sie gibt.
- (c) Lassen sich mit Grammatiken, die nur Produktionen der Form $A \rightarrow a$, $A \rightarrow Ba$, $A \rightarrow aB$ und $A \rightarrow \varepsilon$ enthalten, auch nicht-reguläre Sprachen erzeugen?

Aufgabe 46 Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

mündlich

Finden Sie Grammatiken beliebigen Typs für die Sprachen L_1 und L_2 über Σ .

- (a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt } abab \text{ als Teilwort vor}\}$,
- (b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen doppelt so viele } a\text{'s wie } b\text{'s vor}\}$. (optional)

Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihrer Grammatik.