

Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. Januar 2013

Aufgabe 44

mündlich

Überlegen Sie, wie sich durch geeignete Einschränkung von QBF vollständige Probleme für die Stufen der Polynomialzeithierarchie ableiten lassen.

Aufgabe 45 Zeigen Sie:

mündlich

- Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann auch unter disjunktiven Reduktionen.
- Falls C unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $R \cdot C$ unter dem R -Operator abgeschlossen.
- Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\exists \cdot \forall \cdot BP \cdot C = \exists \cdot \forall \cdot C$.
- Aus $NP \subseteq BPP$ folgt $PH = \Sigma_2^p$.

Aufgabe 46

mündlich

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in SCW$), falls ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in P$ und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : x \# y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x \# M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

- $SAT \in SCW$.
- $NPC \subseteq SCW$, d.h. jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
- Jede Sprache $A \in PSK \cap SCW$ hat eine witness-Funktion in PSK , d.h. es existieren ein Polynom p , eine p -balancierte Sprache $B \in P$ und eine Folge C_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit n Eingängen und $p(n)$ Ausgängen, so dass für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x \# C_n(x) \in B$.
- $PSK \cap SCW \subseteq NP(NP)$,
- $NP(NP(PSK \cap SCW)) = NP(NP)$,
- SAT ist nicht in PSK enthalten, außer wenn PH auf Σ_2^p kollabiert.

Aufgabe 47

mündlich

Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten ist. Bezeichne **TURNIER** die Menge aller Turniergraphen und bezeichne **DIRGI** das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

- DIRGI** und **GI** sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt $DIRGI \equiv_m^{log} GI$.
- Die Anzahl der Automorphismen eines Turniergraphen ist ungerade.
- Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen **TURNIER** \cap **DIRGI** liegt in $\oplus P$.

Aufgabe 48

10 Punkte

Zeigen Sie für jede Sprachklasse C , die unter \leq_m^{log} -Reduktionen abgeschlossen ist:

- $\oplus \cdot C$ ist unter \leq_m^{log} -Reduktionen abgeschlossen.
- $\oplus \cdot C$ ist unter dem \oplus -Operator abgeschlossen, d.h. $\oplus \cdot \oplus \cdot C = \oplus \cdot C$.
- $\exists \cdot C$ ist unter dem \exists -Operator abgeschlossen, d.h. $\exists \cdot \exists \cdot C = \exists \cdot C$.
- $\forall \cdot C$ ist unter dem \forall -Operator abgeschlossen, d.h. $\forall \cdot \forall \cdot C = \forall \cdot C$.