

Übungsblatt 13

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 16.–19. 2. 2021
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 15. 2. 2021, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 23. 2. 2021, 23:59 Uhr*

Aufgabe 81 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

mündlich

- (1) A ist entscheidbar,
- (2) χ_A ist berechenbar,
- (3) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.
- (4) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 82

mündlich

Die *Goldbachsche Vermutung* lautet:

Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung wahr ist. Wir definieren die totale Funktion $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ und die partielle Funktion $g: \{0, 1\}^* \rightarrow \{1\} \cup \{\uparrow\}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{die Goldbachvermutung ist falsch,} \\ 0, & \text{die Goldbachvermutung ist richtig,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 1, \\ \uparrow, & f(x) = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.
- (b) Beschreiben Sie informell eine DTM M , die g berechnet.

Aufgabe 83

9 Punkte

Die *Primzahlzwillingsvermutung* lautet:

Es gibt unendlich viele Primzahlpaare p, q mit $|p - q| = 2$.

Es ist bis heute ungeklärt, ob diese Vermutung wahr ist. Sind die totalen Funktionen $f_i: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ berechenbar? Begründen Sie!

- (a) $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow$ die Primzahlzwillingsvermutung ist wahr *(3 Punkte)*
- (b) $f_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x = \text{bin}(n)$ und n sowie $n + 2$ sind Primzahlen *(3 Punkte)*
- (c) $f_3(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > 5 : n - 2, n$ und $n + 2$ sind Primzahlen *(3 Punkte)*

Aufgabe 84 Zeigen Sie:*mündlich*

- (a) Die Reduktionsrelation \leq ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch (und somit keine Ordnung).
- (b) Die Klasse RE ist unter \leq abgeschlossen.
- (c) Es existiert eine DTM M , die für jede Eingabe der Form $w\#x$ (wobei $w, x \in \{0, 1\}^*$) dasselbe ausgibt wie die DTM M_w bei Eingabe x , d.h. es gilt $M(w\#x) = M_w(x)$.
- (d) Das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig.
- (e) Die Sprache $B = \{1\}$ ist REC-vollständig.
- (f) Für zwei Sprachen A, B gilt $A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$.

Aufgabe 85**9 Punkte**

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

- (a) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ *(mündlich)*
- (b) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$ *(mündlich)*
- (c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt immer die Kopfbewegung } R \text{ aus}\}$ *(mündlich)*
- (d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus}\}$ *(mündlich)*
- (e) $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \in \text{REG}\}$ *(3 Punkte)*
- (f) $L_6 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$ *(3 Punkte)*
- (g) $L_7 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 86**6 Punkte**

Gelten die folgenden Aussagen für beliebige Sprachen $A \in \text{RE}$ und beliebige Sprachen $B \in \text{REC}$? Begründen Sie.

- (a) $A \cap B \in \text{REC}$, d.h. entscheidbar,
- (b) $A \cap B \notin \text{REC}$, d.h. unentscheidbar,
- (c) $A \cap B \in \text{RE}$, d.h. semi-entscheidbar,
- (d) $A \cap B \in \text{co-RE}$, d.h. $\overline{A \cap B}$ ist semi-entscheidbar,

Aufgabe 87**6 Punkte**

Betrachten Sie die DTM $M = (\{p, q, r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, p, \{r\})$ mit

$$\delta: p0 \rightarrow p0R, \quad p1 \rightarrow q1R, \quad q0 \rightarrow p0R, \quad q1 \rightarrow r1N.$$

- (a) Geben Sie $L(M)$ an. *(1 Punkt)*
- (b) Geben Sie eine 2-DTM M' für $\chi_{L(M)}$ an, d.h. M' berechnet die charakteristische Funktion von $L(M)$. Erinnerung: Die Ausgabe einer DTM steht auf dem letzten Band, links vom Kopf. *(5 Punkte)*