Übungsblatt 14

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 3.–6. 2. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 10. 2. 2009

Aufgabe 108 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass NP und co-NP Teilklassen von PSPACE sind.

(b) Folgern Sie, dass jedes PSPACE-vollständige Problem sowohl NP-hart als auch co-NP-hart ist.

Aufgabe 109 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie. ***mündlich***

(a) $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$,

(b) $\mathsf{NP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$ ist unter Komplement abgeschlossen,

(c) $\mathsf{NP} \cap \text{co-}\mathsf{NP}$ ist unter Komplement, Schnitt und Vereinigung abgeschlossen,

(d) $\mathsf{NPC} = \mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{EXP} = \mathsf{P}$,

(e) NPC ist nicht unter $\leq^p$ abgeschlossen, außer wenn $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ ist,

(f) $\mathsf{NP} \subseteq \text{co-}\mathsf{NP} \Leftrightarrow \mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP} \Leftrightarrow \text{co-}\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{NP}$,

(g) $\mathsf{NPC} \cap \text{co-}\mathsf{NP} = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{NPC} \cap \text{co-}\mathsf{NPC} = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{NPC} \neq \text{co-}\mathsf{NPC} \Leftrightarrow \mathsf{NP} \neq \text{co-}\mathsf{NP}$.

Aufgabe 110 ***mündlich***

(a) Überlegen Sie, wie sich ein gegebener regulärer Ausdruck α in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA M transformieren lässt.

(b) Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme als effizient lösbar (d.h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d.h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

- LP_{DFA} (das Leerheitsproblem für DFAs),
- AP_{DFA} (das Ausschöpfungsproblem für DFAs),
- ÄP_{DFA} (das Äquivalenzproblem für DFAs),
- SP_{DFA} (das Schnittproblem für DFAs),
- IP_{DFA} (das Inklusionsproblem für DFAs).

(c) Welche Klassifikation ergibt sich, wenn die regulären Sprachen nicht durch einen DFA, sondern durch einen (sternfreien) regulären Ausdruck oder durch einen NFA beschrieben werden? Begründen Sie.

Aufgabe 111 ***10 Punkte***

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d.h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d.h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

(a) Das Subgraph-Isomorphieproblem SubGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H, ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist. *(mündlich)*

(b) Das 2-Färbbarkeitsproblem 2-Color. *(mündlich)*

(c) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k, ob G eine Clique der Grösse k hat und G k-färbbar ist. *(mündlich)*

(d) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k, ob G eine Clique der Grösse $k+1$ hat und G k-färbbar ist. *(mündlich)*

(e) Bounded-PCP: Entscheide für eine PCP-Instanz I und eine gegebene Unärzahl 0^k, ob I eine PCP-Lösung der Länge höchstens k hat. *(mündlich)*

(f) Entscheide für einen Graphen G und eine gegebene Clique C in G, ob C die einzige Clique der Größe $\|C\|$ in G ist. *(10 Punkte)*

Aufgabe 112 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) A ist genau dann NP-vollständig, wenn $\bar{A}$ co-NP-vollständig ist. *(2 Punkte)*

(b) Sat liegt genau dann in co-NP, wenn $\mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$ ist. *(2 Punkte)*

(c) Die Sprache UnSat der unerfüllbaren booleschen Formeln ist co-NP-vollständig (d.h. $\text{UnSat} \in \text{co-}\mathsf{NPC}$). *(3 Punkte)*

(d) Die Sprache Taut der booleschen Formeln, die von allen Belegungen erfüllt werden (so genannte Tautologien) ist ebenfalls co-NP-vollständig. *(3 Punkte)*

Aufgabe 113 ***10+15 Punkte***

Eine KNF-Formel heißt *fast positiv*, falls negative Literale höchstens in Zweierklauseln vorkommen. Zeigen Sie:

(a) 2-Sat ist in P entscheidbar. *(mündlich)*

(b) 3-Sat eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, ist NP-vollständig. *(mündlich)*

(c) 3-Sat eingeschränkt auf fast positive Formeln ist NP-vollständig. *(10 Punkte)*

(d) 3-Sat eingeschränkt auf Formeln, in denen jede Variable höchstens zweimal vorkommt, ist in P entscheidbar. (*Hinweis:* Reduzieren Sie auf bipartites Matching.) *(+15 Punkte)*

Bemerkung: 3-Sat eingeschränkt auf Formeln, in denen alle Klauseln aus genau drei Literalen bestehen und in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, ist ebenfalls in P entscheidbar.