

## Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 25. November 2010

### Aufgabe 17

mündlich

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

- (1) Jede boolesche Formel über den Junktoren  $\neg$ ,  $\vee$  und  $\wedge$  ist eine Q-Formel.
- (2) Ist  $G$  eine Q-Formel, so auch  $\exists xG$  und  $\forall xG$ .

Sei  $F$  eine Q-Formel mit freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und sei  $a = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$  eine Belegung. Der Wert von  $F$  unter  $a$  ist dann

- $F(a)$ , falls  $F$  quantorenfrei ist,
- $G(a0) \vee G(a1)$ , falls  $F = \exists y G(x_1, \dots, x_n, y)$  ist, und
- $G(a0) \wedge G(a1)$ , falls  $F = \forall y G(x_1, \dots, x_n, y)$  ist.

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas), definiert durch

**Gegeben:** Eine Q-Formel  $F$

**Gefragt:** Ist  $F$  unter allen Belegungen wahr?

in PSPACE entscheidbar ist.

### Aufgabe 18

mündlich

Seien  $\Phi$  und  $\Phi'$  zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion  $r$  gibt, so dass für alle Turingmaschinen  $M$  und für fast alle  $x$  gilt:  $\Phi(M, x) \leq r(x, \Phi'(M, x))$ .

### Aufgabe 19 (Compression Theorem)

mündlich

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Sprache  $L$ , so dass es für jede  $s(n)$ -platzbeschränkte DTM  $M$  mit  $L(M) = L$  eine DTM  $M'$  gibt mit  $L(M') = L$  und  $\text{space}_{M'}(x) \leq \log s(|x|)$  für fast alle Eingaben  $x$ .

*Hinweis:* Definieren Sie die Funktion  $S$  durch  $S(n) = 2$  für  $n \leq 0$  und  $S(n+1) = 2^{S(n)}$  für  $n > 0$ , und konstruieren Sie bezüglich einer geeigneten Aufzählung  $M_1, M_2, \dots$  aller DTMs eine Sprache  $L \subseteq \{0\}^*$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. Falls  $M_i$  die Sprache  $L$  entscheidet, so gilt  $s_i(n) \geq S(n-i)$  für fast alle  $n$  ( $s_i(n)$  bezeichnet den maximalen Platzverbrauch von  $M_i$  bei Eingaben der Länge  $n$ ).
2. Für alle  $k \geq 1$  gibt es eine DTM  $M_i$  mit  $s_i(n) \leq S(n-k)$ , die  $L$  entscheidet.

### Aufgabe 20

mündlich

Beweisen Sie den Platzhierarchiesatz: Ist  $f$  eine echte Komplexitätsfunktion und gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist  $\text{DSPACE}(f(n)) \setminus \text{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset$ .

### Aufgabe 21 (Union Theorem)

10 Punkte

Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion  $S$  mit  $\text{DSPACE}(S(n)) = \text{PSPACE}$ .

*Hinweis:* Definieren Sie  $S(n)$  bezüglich einer Aufzählung  $M_1, M_2, \dots$  aller DTMs, so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

1. Für alle  $k$  gilt  $S(n) \geq n^k$  für fast alle  $n$ .
2. Falls der Platzbedarf  $s_i(n)$  von  $M_i$  für alle  $k$  die Bedingung  $s_i(n) > n^k$  für unendlich viele  $n$  erfüllt, dann gilt auch  $s_i(n) > S(n)$  für unendlich viele  $n$ .