Übungen zur Komplexitätstheorie — Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 Zeigen Sie:

a) Die Komplexitätsklassen L, NL, P, NP, co-NP, PSPACE, EXP und EXPSPACE sind unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen.

b) Falls es eine NP-vollständige Menge in P gibt, dann ist P = NP.

c) Falls es eine NL-vollständige Menge in L gibt, dann ist L = NL.

Aufgabe 26 Zwei Sprachen A und B heißen **äquivalent** ($A \equiv_m^{log} B$), falls $A \leq_m^{log} B$ und $B \leq_m^{log} A$ gilt. Der **Grad** einer Sprache A ist die Klasse aller Sprachen B, die äquivalent zu A sind. Aus wie vielen verschiedenen Graden besteht die Klasse L?

Aufgabe 27 Zeigen Sie, dass folgende Probleme NL-vollständig sind.

a) Reach *Hinweis*: Betrachten Sie den Konfigurationsgraphen.

b) 2-Sat *Hinweis*: Zeigen Sie Reach $\leq \overline{\text{2-Sat}}$.

Aufgabe 28 Zeigen Sie, dass jede von einer blinden DTM in Zeit $t(n)$ akzeptierte Sprache Schaltkreise der Größe $O(t(n))$ hat. *Bemerkung:* Es ist bekannt, dass Sprachen in DTIME$(t(n))$ von blinden DTMs in Zeit $O(t(n) \log t(n))$ erkannt werden.

Aufgabe 29 (schriftlich, 10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Eine Knotenmenge $D \subseteq V$ heißt **Dominating Set**, falls für jeden Knoten $v \notin D$ ein Knoten $u \in D$ mit $(u, v) \in E$ existiert. Das **Dominating Set Problem (DomSet)** ist wie folgt definiert:

> ***Gegeben:*** Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl k.
>
> ***Gefragt:*** Hat G ein Dominating Set D der Größe $\|D\| \leq k$?

G heißt **Turniergraph**, falls für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) vorhanden ist. Zeigen Sie:

a) DomSet ist NP-vollständig. *Hinweis*: 3-Sat $\leq$ NodeCover $\leq$ DomSet.

b) Ein Turniergraph mit n Knoten hat ein Dominating Set der Größe $\log n$.

c) Falls das Dominating Set Problem für Turniergraphen NP-vollständig ist, dann gilt NP $\subseteq$ DTIME$(n^{O(\log n)})$.