

Vorlesungsskript  
Einführung in die Theoretische  
Informatik

Wintersemester 2011/12

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

31. Oktober 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Reguläre Sprachen</b>	<b>2</b>
2.1	Endliche Automaten . . . . .	2
2.2	Nichtdeterministische endliche Automaten . . . . .	4
2.3	Reguläre Ausdrücke . . . . .	7
2.4	Relationalstrukturen . . . . .	9
2.4.1	Ordnungs- und Äquivalenzrelationen . . . . .	13

# 1 Einleitung

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischen Modellen für Maschinentypen von unterschiedlicher Berechnungskraft. Unter anderem lernen wir das Rechenmodell der Turingmaschine (TM) kennen, mit dem sich alle anderen Rechenmodelle simulieren lassen. Ein weiteres wichtiges Thema der Vorlesung ist die Frage, welche Probleme algorithmisch lösbar sind und wo die Grenzen der Berechenbarkeit verlaufen.

Schließlich untersuchen wir die Komplexität von algorithmischen Problemen, indem wir den benötigten Rechenaufwand möglichst gut nach oben und unten abschätzen. Eine besondere Rolle spielen hierbei die NP-vollständigen Probleme, deren Komplexität bis heute offen ist.

## Themen der Vorlesung

- Welche Rechenmodelle sind für bestimmte Aufgaben adäquat? (Automatentheorie)
- Welche Probleme sind lösbar? (Berechenbarkeitstheorie)
- Welcher Aufwand ist zur Lösung eines algorithmischen Problems nötig? (Komplexitätstheorie)

In den theoretisch orientierten Folgeveranstaltungen wird es dagegen um folgende Themen gehen.

## Thema der Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? (Algorithmik)

## Thema der Vorlesung Logik in der Informatik

- Mathematische Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung (Aussagenlogik, Prädikatenlogik)

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten **Muhammed Al Chwarizmi** (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er jede *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten löst (etwa durch Produktion einer *Ausgabe*). Eine wichtige Rolle spielen Entscheidungsprobleme, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird. Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein. Diese werden über einem *Eingabealphabet*  $\Sigma$  kodiert.

### Definition 1.

- Ein **Alphabet**  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$  ist eine geordnete Menge von endlich vielen **Zeichen**.
- Eine Folge  $x = x_1 \dots x_n$  von  $n$  Zeichen heißt **Wort** (der **Länge**  $n$ ).
- Die Menge aller Wörter über  $\Sigma$  ist

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n,$$

wobei  $\Sigma^n = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 0 \text{ und } x_i \in \Sigma \text{ für } i = 1, \dots, n\}$  alle Wörter der Länge  $n$  enthält.

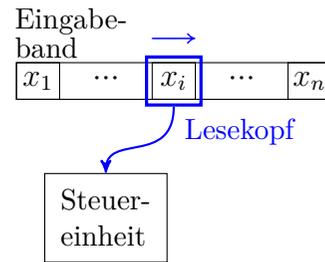
- Das (einzige) Wort der Länge  $n = 0$  ist das **leere Wort**, welches wir mit  $\varepsilon$  bezeichnen.
- Jede Teilmenge  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt **Sprache** über dem Alphabet  $\Sigma$ .

Das zu einer Sprache  $L$  gehörige Entscheidungsproblem ist die Frage, ob ein gegebenes Wort  $x$  in  $L$  enthalten ist oder nicht.

## 2 Reguläre Sprachen

Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B. endliche Automaten (DFA, NFA), Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

### 2.1 Endliche Automaten



Ein endlicher Automat führt bei einer Eingabe der Länge  $n$  nur  $n$  Rechenschritte aus. Um die gesamte Eingabe lesen zu können, muss der Automat also in jedem Schritt ein Zeichen der Eingabe verarbeiten.

**Definition 2.** Ein **endlicher Automat** (kurz: DFA; deterministic finite automaton) wird durch ein 5-Tupel  $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$  beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$  eine endliche Menge von **Zuständen**,
- $\Sigma$  das **Eingabealphabet**,
- $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z$  die **Überföhrungsfunktion**,
- $q_0 \in Z$  der **Startzustand** und
- $E \subseteq Z$  die Menge der **Endzustände** ist.

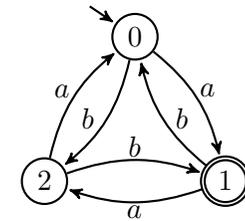
Die von  $M$  **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

**Beispiel 3.** Betrachte den DFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$  mit  $Z = \{0, 1, 2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $E = \{1\}$  und der Überföhrungsfunktion

$\delta$	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird meist durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet.  $\triangleleft$

Bezeichne  $\hat{\delta}(q, x)$  denjenigen Zustand, in dem sich  $M$  nach Lesen von  $x$  befindet, wenn  $M$  im Zustand  $q$  gestartet wird. Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$$

induktiv wie folgt definieren. Für  $q \in Z$ ,  $x \in \Sigma^*$  und  $a \in \Sigma$  sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \epsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

Die von  $M$  erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

schreiben.

**Behauptung 4.** Der DFA  $M$  aus Beispiel 3 akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv 1 \pmod{3}\},$$

wobei  $\#_a(x)$  die Anzahl der Vorkommen des Zeichens  $a$  in  $x$  bezeichnet und  $j \equiv k \pmod{m}$  bedeutet, dass  $j - k$  durch  $m$  teilbar ist. Für Letzteres schreiben wir auch kurz  $j \equiv_m k$ .

*Beweis.* Da  $M$  nur den Endzustand 1 hat, ist  $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$ , d.h. wir müssen folgende Äquivalenz zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1.$$

Hierzu reicht es, die Kongruenz

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

zu beweisen, wofür wir Induktion über die Länge  $n$  von  $x$  benutzen.

**Induktionsanfang ( $n = 0$ ):** klar, da  $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$  ist.

**Induktionsschritt ( $n \rightsquigarrow n + 1$ ):** Sei  $x = x_1 \dots x_{n+1}$  gegeben und sei  $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$ . Nach IV gilt dann

$$i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n).$$

Wegen  $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$  und  $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$  folgt

$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &= \#_a(x) - \#_b(x). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x). \quad \blacksquare$$

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als **regulär** bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

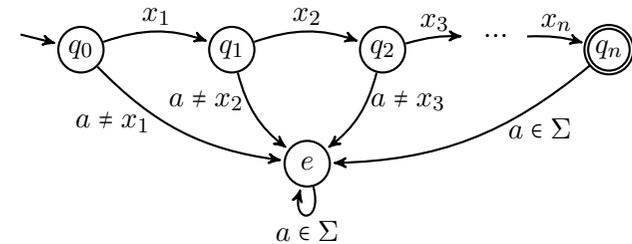
$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Um ein intuitives Verständnis für die Berechnungskraft von DFAs zu entwickeln, werden wir Antworten auf folgende Frage suchen.

**Frage:** Welche Sprachen gehören zu REG und welche nicht?

Dabei legen wir unseren Überlegungen ein beliebiges aber fest gewähltes Alphabet  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$  zugrunde.

**Beobachtung 5.** Alle Sprachen, die aus einem einzigen Wort  $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  bestehen (diese Sprachen werden auch als Singletonsprachen bezeichnet), sind regulär. Für folgenden DFA  $M_x$  gilt nämlich  $L(M_x) = \{x\}$ .



Formal ist  $M_x$  also das Tupel  $(Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$  mit  $Z = \{q_0, \dots, q_n, e\}$ ,  $E = \{q_n\}$  und der Überföhrungsfunktion

$$\delta(q, a_j) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i \text{ für ein } i \text{ mit } 0 \leq i \leq n-1 \text{ und } a_j = x_{i+1} \\ e, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als nächstes betrachten wir Abschlusseigenschaften der Sprachklasse REG.

**Definition 6.** Ein **k-stelliger Sprachoperator** ist eine Abbildung  $op$ , die  $k$  Sprachen  $L_1, \dots, L_k$  auf eine Sprache  $op(L_1, \dots, L_k)$  abbildet.

**Beispiel 7.** Der Schnittoperator  $\cap$  bildet zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  auf die Sprache  $L_1 \cap L_2$  ab.  $\triangleleft$

**Definition 8.** Eine Sprachklasse  $\mathcal{K}$  heißt unter  $op$  **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

Der **Abschluss** von  $\mathcal{K}$  unter  $op$  ist die bzgl. Inklusion kleinste Sprachklasse  $\mathcal{K}'$ , die  $\mathcal{K}$  enthält und unter  $op$  abgeschlossen ist.

**Beispiel 9.** Der Abschluss der Singletonsprachen unter Vereinigung besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen.  $\triangleleft$

**Definition 10.** Für eine Sprachklasse  $\mathcal{C}$  bezeichne  $co\text{-}\mathcal{C}$  die Klasse  $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$  aller Komplemente von Sprachen in  $\mathcal{C}$ .

Es ist leicht zu sehen, dass  $\mathcal{C}$  genau dann unter Komplementbildung abgeschlossen ist, wenn  $co\text{-}\mathcal{C} = \mathcal{C}$  ist.

**Beobachtung 11.** Mit  $L_1, L_2 \in \text{REG}$  sind auch die Sprachen  $\bar{L}_1 = \Sigma^* \setminus L_1$ ,  $L_1 \cap L_2$  und  $L_1 \cup L_2$  regulär. Sind nämlich  $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_0, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , DFAs mit  $L(M_i) = L_i$ , so akzeptiert der DFA

$$\bar{M}_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, q_0, Z_1 \setminus E_1)$$

das Komplement  $\bar{L}_1$  von  $L_1$ . Der Schnitt  $L_1 \cap L_2$  von  $L_1$  und  $L_2$  wird dagegen von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_0, q_0), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((q, p), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(p, a))$$

akzeptiert ( $M$  wird auch **Kreuzproduktautomat** genannt). Wegen  $L_1 \cup L_2 = \overline{(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2)}$  ist dann aber auch die Vereinigung von  $L_1$  und  $L_2$  regulär. (Wie sieht der zugehörige DFA aus?)

Aus Beobachtung 11 folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind. Da die in Beispiel 3 betrachtete Sprache weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob REG neben den mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement unter weiteren Operationen wie etwa der **Produktbildung**

$$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

(auch **Verkettung** oder **Konkatenation** genannt) oder der Bildung der **Sternhülle**

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

abgeschlossen ist. Die  $n$ -fache Potenz  $L^n$  von  $L$  ist dabei induktiv definiert durch

$$L^0 = \{\varepsilon\}, \quad L^{n+1} = L^n L.$$

Die **Plushülle** von  $L$  ist

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = LL^*.$$

Ist  $L_1 = \{x\}$  eine Singletonsprache, so schreiben wir für das Produkt  $\{x\}L_2$  auch einfach  $xL_2$ .

Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Klasse REG als der Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produktbildung und Sternhülle charakterisierbar ist.

Beim Versuch, einen endlichen Automaten für das Produkt  $L_1 L_2$  zweier regulärer Sprachen zu konstruieren, stößt man auf die Schwierigkeit, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von)  $M_1$  zu  $M_2$  zu finden. Unter Verwendung eines nichtdeterministischen Automaten lässt sich dieses Problem jedoch leicht beheben, da dieser den richtigen Zeitpunkt „erraten“ kann.

Im nächsten Abschnitt werden wir nachweisen, dass auch nichtdeterministische endliche Automaten nur reguläre Sprachen erkennen können.

## 2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

**Definition 12.** Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (kurz: *NFA*; *nondeterministic finite automaton*)  $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$  ist ähnlich aufgebaut wie ein DFA, nur dass er mehrere Startzustände (zusammengefasst in der Menge  $Q_0 \subseteq Z$ ) haben kann

und seine Überföhrungsfunktion die Form

$$\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{P}(Z)$  die Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen) von  $Z$ . Diese wird auch oft mit  $2^Z$  bezeichnet. Die von  $N$  akzeptierte Sprache ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \exists q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ q_{i+1} \in \delta(q_i, x_{i+1}) \text{ f\u00fcr } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

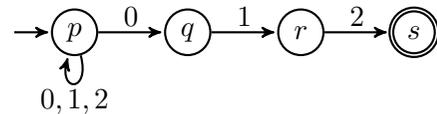
Ein NFA kann also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen ausföhren. Die Eingabe geh\u00f6rt bereits dann zu  $L(N)$ , wenn bei einer dieser Rechnungen nach Lesen des gesamten Eingabewortes ein Endzustand erreicht wird.

Im Gegensatz zu einem DFA, dessen \u00dcberf\u00f6hrungsfunktion auf der gesamten Menge  $Z \times \Sigma$  definiert ist, kann ein NFA „stecken bleiben“. Das ist dann der Fall, wenn er in einen Zustand  $q$  gelangt, in dem das n\u00e4chste Eingabezeichen  $x_i$  wegen  $\delta(q, x_i) = \emptyset$  nicht gelesen werden kann.

**Beispiel 13.** Betrachte den NFA  $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$  mit Zustandsmenge  $Z = \{p, q, r, s\}$ , Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ , Start- und Endzustandsmenge  $Q_0 = \{p\}$  und  $E = \{s\}$  sowie der \u00dcberf\u00f6hrungsfunktion

$\delta$	$p$	$q$	$r$	$s$
0	$\{p, q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{p\}$	$\emptyset$	$\{s\}$	$\emptyset$

Graphische Darstellung:



Offensichtlich akzeptiert  $N$  die Sprache  $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$  aller W\u00f6rter, die mit dem Suffix 012 enden.  $\triangleleft$

**Beobachtung 14.** Sind  $N_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$  ( $i = 1, 2$ ) NFAs, so werden auch die Sprachen  $L(N_1)L(N_2)$  und  $L(N_1)^*$  von einem NFA erkannt. Wir k\u00f6nnen  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$  annehmen. Dann akzeptiert der NFA

$$N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta_3, Q_1, E)$$

mit

$$\delta_3(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \emptyset \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache  $L(N_1)L(N_2)$  und der NFA

$$N^* = (Z_1 \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta_4, Q_1 \cup \{q_{neu}\}, E_1 \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta_4(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_1} \delta_1(q, a), & p \in E_1, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache  $L(N_1)^*$ .

**Satz 15** (Rabin und Scott).

$$\text{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

*Beweis.* Die Inklusion von links nach rechts ist klar, da jeder DFA auch als NFA aufgefasst werden kann. F\u00fcr die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem NFA  $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$  einen DFA  $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$  mit  $L(M) = L(N)$ . Wir definieren die \u00dcberf\u00f6hrungsfunktion  $\delta' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  von  $M$  mittels

$$\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a).$$

Die Menge  $\delta'(Q, a)$  enthält also alle Zustände, in die  $N$  gelangen kann, wenn  $N$  ausgehend von einem beliebigen Zustand  $q \in Q$  das Zeichen  $a$  liest. Intuitiv bedeutet dies, dass der DFA  $M$  den NFA  $N$  simuliert, indem  $M$  in seinem aktuellen Zustand  $Q$  die Information speichert, in welchen Zuständen sich  $N$  momentan befinden könnte. Für die Erweiterung  $\hat{\delta}' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  von  $\delta'$  (siehe Seite 2) können wir nun folgende Behauptung zeigen:

$\hat{\delta}'(Q_0, x)$  enthält alle Zustände, die  $N$  ausgehend von einem Startzustand nach Lesen der Eingabe  $x$  erreichen kann.

Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Länge  $n$  von  $x$ .

**Induktionsanfang (n = 0):** klar, da  $\hat{\delta}'(Q_0, \varepsilon) = Q_0$  ist.

**Induktionsschritt (n - 1  $\rightsquigarrow$  n):** Sei  $x = x_1 \dots x_n$  gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}'(Q_0, x_1 \dots x_{n-1})$$

alle Zustände, die  $N(x)$  in genau  $n - 1$  Schritten erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}'(Q_0, x) = \delta'(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \delta(q, x_n)$$

enthält dann aber  $\hat{\delta}'(Q_0, x)$  alle Zustände, die  $N(x)$  in genau  $n$  Schritten erreichen kann.

Deklarieren wir nun diejenigen Teilmengen  $Q \subseteq Z$ , die mindestens einen Endzustand von  $N$  enthalten, als Endzustände des **Potenzmengenautomaten**  $M$ , d.h.

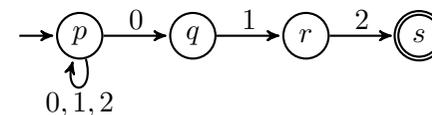
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \emptyset\},$$

so folgt für alle Wörter  $x \in \Sigma^*$ :

$$\begin{aligned} x \in L(N) &\Leftrightarrow N(x) \text{ kann in genau } |x| \text{ Schritten einen Endzustand erreichen} \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(Q_0, x) \in E' \\ &\Leftrightarrow x \in L(M). \end{aligned}$$

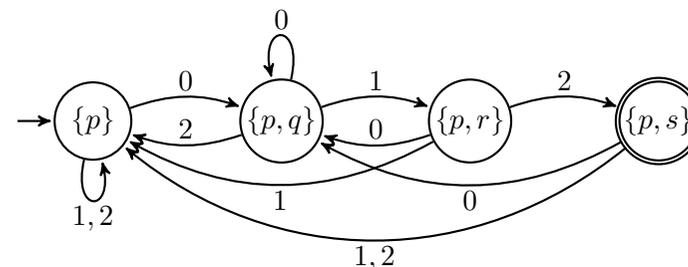
■

**Beispiel 16.** Für den NFA  $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$  aus Beispiel 13



ergibt die Konstruktion des vorigen Satzes den folgenden DFA  $M$  (nach Entfernen aller vom Startzustand  $Q_0 = \{p\}$  aus nicht erreichbaren Zustände):

$\delta'$	0	1	2
$Q_0 = \{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$Q_1 = \{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$Q_2 = \{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$Q_3 = \{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



◀

Im obigen Beispiel wurden für die Konstruktion des DFA  $M$  aus dem NFA  $N$  nur 4 der insgesamt  $2^{|Z|} = 16$  Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände in  $\mathcal{P}(Z)$  nicht vom Startzustand  $Q_0 = \{p\}$  aus erreichbar sind. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle  $2^{|Z|}$  Zustände in  $\mathcal{P}(Z)$  für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten benötigt werden (siehe Übungen).

**Korollar 17.** Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement,
- Durchschnitt,
- Vereinigung,
- Produkt,
- Sternhülle.

### 2.3 Reguläre Ausdrücke

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon überzeugt, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen können:

$$\text{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen kennen lernen:

REG ist die Klasse aller Sprachen, die sich mittels der Operationen Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus der leeren Menge und den Singletonsprachen bilden lassen.

Tatsächlich kann hierbei sogar auf die Durchschnitts- und Komplementbildung verzichtet werden.

**Definition 18.** Die Menge der **regulären Ausdrücke**  $\gamma$  (über einem Alphabet  $\Sigma$ ) und die durch  $\gamma$  dargestellte Sprache  $L(\gamma)$  sind induktiv wie folgt definiert. Die Symbole  $\emptyset$ ,  $\epsilon$  und  $a$  ( $a \in \Sigma$ ) sind reguläre Ausdrücke, die

- die leere Sprache  $L(\emptyset) = \emptyset$ ,
- die Sprache  $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$  und
- für jedes Zeichen  $a \in \Sigma$  die Sprache  $L(a) = \{a\}$

beschreiben. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  reguläre Ausdrücke, die die Sprachen  $L(\alpha)$  und  $L(\beta)$  beschreiben, so sind auch  $\alpha\beta$ ,  $(\alpha|\beta)$  und  $(\alpha)^*$  reguläre Ausdrücke, die die Sprachen

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$ ,
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$  und
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$

beschreiben.

**Bemerkung 19.**

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende **Präzedenzordnung**: Der Sternoperator  $*$  bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator. Für  $((a|b(c)^*)|d)$  können wir also kurz  $a|bc^*|d$  schreiben.
- Da der reguläre Ausdruck  $\gamma\gamma^*$  die Sprache  $L(\gamma)^+$  beschreibt, verwenden wir  $\gamma^+$  als Abkürzung für den Ausdruck  $\gamma\gamma^*$ .

**Beispiel 20.** Die regulären Ausdrücke  $\epsilon^*$ ,  $\emptyset^*$ ,  $(0|1)^*00$  und  $(\epsilon 0|\emptyset 1^*)$  beschreiben folgende Sprachen:

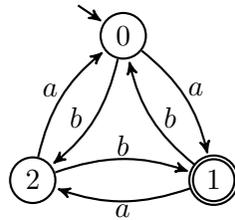
$\gamma$	$\epsilon^*$	$\emptyset^*$	$(0 1)^*00$	$(\epsilon 0 \emptyset 1^*)$
$L(\gamma)$	$\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$	$\emptyset^* = \{\epsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0, 1\}^*\}$	$\{0\}$



**Beispiel 21.** Betrachte nebenstehenden DFA  $M$ .  
Um für die von  $M$  erkannte Sprache

$$L(M) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

einen regulären Ausdruck zu finden, betrachten wir zunächst die Sprache  $L_{0,0}$  aller Wörter  $x$ , die den DFA  $M$  ausgehend vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen. Weiter sei  $L_{0,0}^{\neq 0}$  die Teilsprache der Wörter  $y \neq \varepsilon$  in  $L_{0,0}$ , die dies tun ohne zwischendurch den Zustand 0 zu besuchen. Dann setzt sich jedes  $x \in L_{0,0}$  aus beliebig vielen Teilwörtern  $y_1, \dots, y_k \in L_{0,0}^{\neq 0}$  zusammen, d.h.  $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$ .



Jedes  $y \in L_{0,0}^{\neq 0}$  beginnt entweder mit einem  $a$  (Übergang von 0 nach 1) oder mit einem  $b$  (Übergang von 0 nach 2). Im ersten Fall folgt eine beliebige Anzahl von Teilwörtern  $ab$  (Wechsel zwischen 1 und 2), an die sich entweder das Suffix  $aa$  (Rückkehr von 1 nach 0 über 2) oder das Suffix  $b$  (direkte Rückkehr von 1 nach 0) anschließt. Analog folgt im zweiten Fall eine beliebige Anzahl von Teilwörtern  $ba$  (Wechsel zwischen 2 und 1), an die sich entweder das Suffix  $a$  (direkte Rückkehr von 2 nach 0) oder das Suffix  $bb$  (Rückkehr von 2 nach 0 über 1) anschließt. Daher lässt sich  $L_{0,0}^{\neq 0}$  durch den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb)$$

beschreiben. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass sich die Sprache  $L_{0,1}^{\neq 0}$  aller Wörter, die  $M$  ausgehend von 0 in den Zustand 1 überführen, ohne dass zwischendurch der Zustand 0 nochmals besucht wird, durch den regulären Ausdruck  $\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*$  beschreibbar ist. Somit erhalten wir für  $L(M)$  den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,1} = (\gamma_{0,0}^{\neq 0})^* \gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^* (a|bb)(ab)^*.$$

◁

**Satz 22.**  $\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\} \subseteq \text{REG}.$

*Beweis.* Die Inklusion von rechts nach links ist klar, da die Basisausdrücke  $\emptyset$ ,  $\epsilon$  und  $a$ ,  $a \in \Sigma^*$ , nur reguläre Sprachen beschreiben und die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist (siehe Beobachtungen 11 und 14).

Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem DFA  $M$  einen regulären Ausdruck  $\gamma$  mit  $L(\gamma) = L(M)$ . Sei also  $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$  ein DFA, wobei wir annehmen können, dass  $Z = \{1, \dots, m\}$  und  $q_0 = 1$  ist. Dann lässt sich  $L(M)$  als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form

$$L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$$

darstellen. Folglich reicht es zu zeigen, dass die Sprachen  $L_{p,q}$  durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind. Hierzu betrachten wir die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \hat{\delta}(p, x_1 \dots x_n) = q \text{ und für} \\ i = 1, \dots, n-1 \text{ gilt } \hat{\delta}(p, x_1 \dots x_i) \leq r \end{array} \right\}.$$

Wegen  $L_{p,q} = L_{p,q}^m$  reicht es, reguläre Ausdrücke  $\gamma_{p,q}^r$  für die Sprachen  $L_{p,q}^r$  anzugeben. Im Fall  $r = 0$  enthält

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & p = q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p, a) = q\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

nur Buchstaben (und eventuell das leere Wort) und ist somit leicht durch einen regulären Ausdruck  $\gamma_{p,q}^0$  beschreibbar. Wegen

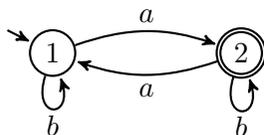
$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r$$

lassen sich aus den regulären Ausdrücken  $\gamma_{p,q}^r$  für die Sprachen  $L_{p,q}^r$  leicht reguläre Ausdrücke für die Sprachen  $L_{p,q}^{r+1}$  gewinnen:

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r \mid \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r.$$

■

**Beispiel 23.** Betrachte den DFA



Da  $M$  insgesamt  $m = 2$  Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^2 = L(\gamma_{1,2}^2).$$

Um  $\gamma_{1,2}^2$  zu berechnen, benutzen wir die Rekursionsformel

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r | \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^2 &= \gamma_{1,2}^1 | \gamma_{1,2}^1 (\gamma_{2,2}^1)^* \gamma_{2,2}^1, \\ \gamma_{1,2}^1 &= \gamma_{1,2}^0 | \gamma_{1,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0, \\ \gamma_{2,2}^1 &= \gamma_{2,2}^0 | \gamma_{2,1}^0 (\gamma_{1,1}^0)^* \gamma_{1,2}^0. \end{aligned}$$

Um den regulären Ausdruck  $\gamma_{1,2}^2$  für  $L(M)$  zu erhalten, genügt es also, die regulären Ausdrücke  $\gamma_{1,1}^0, \gamma_{1,2}^0, \gamma_{2,1}^0, \gamma_{2,2}^0, \gamma_{1,2}^1$  und  $\gamma_{2,2}^1$  zu berechnen:

$r$	$p, q$			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon b$	$a$	$a$	$\epsilon b$
1	-	$\underbrace{a (\epsilon b)(\epsilon b)^*a}_{b^*a}$	-	$\underbrace{(\epsilon b) a(\epsilon b)^*a}_{\epsilon b ab^*a}$
2	-	$\underbrace{b^*a b^*a(\epsilon b ab^*a)^*(\epsilon b ab^*a)}_{b^*a(b ab^*a)^*}$	-	-

◁

**Korollar 24.** Sei  $L$  eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $L$  ist regulär,
- es gibt einen DFA  $M$  mit  $L = L(M)$ ,
- es gibt einen NFA  $N$  mit  $L = L(N)$ ,
- es gibt einen regulären Ausdruck  $\gamma$  mit  $L = L(\gamma)$ ,
- $L$  lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,
- $L$  lässt sich mit den Operationen  $\cap, \cup$ , Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.

Wir werden bald noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken. Zuvor befassen wir uns jedoch mit dem Problem, DFAs zu minimieren. Dabei spielen Relationen (insbesondere Äquivalenzrelationen) eine wichtige Rolle.

## 2.4 Relationalstrukturen

Sei  $A$  eine nichtleere Menge,  $R_i$  eine  $k_i$ -stellige Relation auf  $A$ , d.h.  $R_i \subseteq A^{k_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann heißt  $(A; R_1, \dots, R_n)$  **Relationalstruktur**. Die Menge  $A$  heißt **Grundmenge**, **Trägermenge** oder **Individuenbereich** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall  $n = 1, k_1 = 2$ , also  $(A, R)$  mit  $R \subseteq A \times A$  betrachten. Man nennt dann  $R$  eine (**binäre**) **Relation** auf  $A$ . Oft wird für  $(a, b) \in R$  auch die **Infix-Schreibweise**  $aRb$  benutzt.

**Beispiel 25.**

- $(F, M)$  mit  $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$  und

$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}.$$

- $(U, B)$  mit  $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$  und

$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}.$$

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ , wobei  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge einer beliebigen Menge  $M$  und  $\subseteq$  die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von  $M$  ist.
- $(A, Id_A)$ , wobei  $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$  die **Identität auf  $A$**  ist.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ .
- $(\mathbb{Z}, \mid)$ , wobei  $\mid$  die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h.  $a \mid b$ , falls ein  $c \in \mathbb{Z}$  mit  $b = ac$  existiert).  $\triangleleft$

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen **Durchschnitt**, **Vereinigung**, **Komplement** und **Differenz** definiert. Seien  $R$  und  $S$  Relationen auf  $A$ , dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

Sei allgemeiner  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$  eine beliebige Menge von Relationen auf  $A$ . Dann sind der **Schnitt über  $\mathcal{M}$**  und die **Vereinigung über  $\mathcal{M}$**  folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Die **transponierte (konverse) Relation** zu  $R$  ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

$R^T$  wird oft auch mit  $R^{-1}$  bezeichnet. Z.B. ist  $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$ .

Seien  $R$  und  $S$  Relationen auf  $A$ . Das **Produkt** oder die **Komposition** von  $R$  und  $S$  ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

**Beispiel 26.** Ist  $B$  die Relation "ist Bruder von",  $V$  "ist Vater von",  $M$  "ist Mutter von" und  $E = V \cup M$  "ist Elternteil von", so ist  $B \circ E$  die Onkel-Relation.  $\triangleleft$

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch  $R;S$  und  $R \cdot S$  oder einfach  $RS$ . Das  $n$ -fache Relationenprodukt  $R \circ \dots \circ R$  von  $R$  wird mit  $R^n$  bezeichnet. Dabei ist  $R^0 = Id$ .

**Vorsicht:** Das  $n$ -fache Relationenprodukt  $R^n$  von  $R$  sollte nicht mit dem  $n$ -fachen kartesischen Produkt  $R \times \dots \times R$  der Menge  $R$  verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass  $R^n$  das  $n$ -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls  $R$  eine Relation ist.

### Eigenschaften von Relationen

Sei  $R$  eine Relation auf  $A$ . Dann heißt  $R$

- reflexiv**, falls  $\forall x \in A : xRx$  (also  $Id_A \subseteq R$ )
- irreflexiv**, falls  $\forall x \in A : \neg xRx$  (also  $Id_A \subseteq \overline{R}$ )
- symmetrisch**, falls  $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$  (also  $R \subseteq R^T$ )
- asymmetrisch**, falls  $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$  (also  $R \subseteq \overline{R^T}$ )
- antisymmetrisch**, falls  $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$  (also  $R \cap R^T \subseteq Id$ )
- konnex**, falls  $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$  (also  $A \times A \subseteq R \cup R^T$ )
- semikonnex**, falls  $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$  (also  $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$ )
- transitiv**, falls  $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$  (also  $R^2 \subseteq R$ )

gilt.

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen können.

**Beispiel 27.**

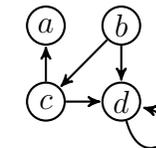
- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.
- $(\mathbb{R}, <)$  ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex und somit eine lineare Striktordnung.
- $(\mathbb{R}, \leq)$  und  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit Ordnungen.
- $(\mathbb{R}, \leq)$  ist auch konnex und somit eine lineare Ordnung.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  ist zwar im Fall  $\|M\| \leq 1$  konnex, aber im Fall  $\|M\| \geq 2$  weder semikonnex noch konnex. ◁

**Graphische Darstellung von Relationen**

Eine Relation  $R$  auf einer endlichen Menge  $A$  kann durch einen **gerichteten Graphen** (oder **Digraphen**)  $G = (V, E)$  mit **Knoten-**

**menge**  $V = A$  und **Kantenmenge**  $E = R$  veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element  $x \in A$  als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar  $(x, y) \in R$  durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **benachbart** oder **adjazent**.

**Beispiel 28.** Für die Relation  $(A, R)$  mit  $A = \{a, b, c, d\}$  und  $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$  erhalten wir folgende graphische Darstellung.



◁

Der **Ausgangsgrad** eines Knotens  $x \in V$  ist  $\text{deg}^+(x) = \|R[x]\|$ , wobei  $R[x] = \{y \in V \mid xRy\}$  die Menge der **Nachfolger** von  $x$  ist. Entsprechend ist  $\text{deg}^-(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$  der **Eingangsgrad** von  $x$  und  $R^{-1}[x] = \{y \in V \mid yRx\}$  die Menge der **Vorgänger** von  $x$ . Falls  $R$  symmetrisch ist, werden die Pfeilspitzen meist weggelassen. In diesem Fall ist  $d(x) = \text{deg}^-(x) = \text{deg}^+(x)$  der **Grad** von  $x$  und  $R[x] = R^{-1}[x]$  heißt die **Nachbarschaft** von  $x$ . Ist  $R$  zudem irreflexiv, so ist  $G$  **schleifenfrei** und wir erhalten einen (**ungerichteten**) **Graphen**.

**Darstellung durch eine Adjazenzmatrix**

Eine Relation  $R$  auf einer endlichen (geordneten) Menge  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  lässt sich durch eine boolesche  $n \times n$ -Matrix  $M_R = (m_{ij})$  mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge  $A = \{a, b, c, d\}$  die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Darstellung durch eine Adjazenzliste

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation  $R$  in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element  $x \in A$  seine Nachfolgermenge  $R[x]$  in Form einer Liste zuordnet:

$x$	$R[x]$
$a$	-
$b$	$c, d$
$c$	$a, d$
$d$	$d$

Sind  $M_R = (r_{ij})$  und  $M_S = (s_{ij})$  boolesche  $n \times n$ -Matrizen für  $R$  und  $S$ , so erhalten wir für  $T = R \circ S$  die Matrix  $M_T = (t_{ij})$  mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Die Nachfolgermenge  $T[x]$  von  $x$  bzgl. der Relation  $T = R \circ S$  berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup \{S[y] \mid y \in R[x]\} = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

**Beispiel 29.** Betrachte die Relationen  $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$  und  $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$  auf der Menge  $A = \{a, b, c, d\}$ .

Relation	$R$	$S$	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenzmatrix	1010 0000 0101 0000	0100 0000 0000 1010	0100 0000 1010 0000	0000 0000 0000 1111
Adjazenzliste	$a : a, c$ $b : -$ $c : b, d$ $d : -$	$a : b$ $b : -$ $c : -$ $d : a, c$	$a : b$ $b : -$ $c : a, c$ $d : -$	$a : -$ $b : -$ $c : -$ $d : a, b, c, d$

◁

**Beobachtung:** Das Beispiel zeigt, dass das Relationenprodukt nicht kommutativ ist, d.h. i.a. gilt nicht  $R \circ S = S \circ R$ .

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge  $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$  aller binären Relationen auf  $A$  mit dem Relationenprodukt  $\circ$  als binärer Operation und der Relation  $Id_A$  als neutralem Element eine Halbgruppe (oder **Monoid**) bildet.

**Satz 30.** Seien  $Q, R, S$  Relationen auf  $A$ . Dann gilt

- (i)  $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$ , d.h.  $\circ$  ist assoziativ,
- (ii)  $Id \circ R = R \circ Id = R$ , d.h.  $Id$  ist neutrales Element.

*Beweis.*

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} x (Q \circ R) \circ S y &\Leftrightarrow \exists u \in A : x (Q \circ R) u \wedge u S y \\ &\Leftrightarrow \exists u \in A : (\exists v \in A : x Q v R u) \wedge u S y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v \in A : x Q v R u S y \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v \wedge (\exists u \in A : v R u \wedge u S y) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v (R \circ S) y \\ &\Leftrightarrow x Q \circ (R \circ S) y \end{aligned}$$

(ii) Wegen  $x Id \circ R y \Leftrightarrow \exists z : x = z \wedge z R y \Leftrightarrow x R y$  folgt  $Id \circ R = R$ . Die Gleichheit  $R \circ Id = R$  folgt analog. ■

Manchmal steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Relation  $R$  durch eine möglichst kleine Modifikation in eine Relation  $R'$  mit vorgegebenen Eigenschaften zu überführen. Will man dabei alle in  $R$  enthaltenen Paare beibehalten, dann sollte  $R'$  aus  $R$  durch Hinzufügen möglichst weniger Paare hervorgehen.

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge reflexiver (bzw. transitiver oder symmetrischer) Relationen wieder reflexiv (bzw. transitiv oder symmetrisch) ist. Folglich existiert zu jeder Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  eine kleinste reflexive (bzw. transitive oder symmetrische) Relation  $R'$ , die  $R$  enthält.

**Definition 31.** Sei  $R$  eine Relation auf  $A$ .

- Die **reflexive Hülle** von  $R$  ist

$$h_{refl}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **symmetrische Hülle** von  $R$  ist

$$h_{sym}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die **transitive Hülle** von  $R$  ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **reflexiv-transitive Hülle** von  $R$  ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **Äquivalenzhülle** von  $R$  ist

$$h_{\ddot{a}q}(R) = \bigcap \{S \mid S \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ und } R \subseteq S\}.$$

**Satz 32.** Sei  $R$  eine Relation auf  $A$ .

- (i)  $h_{refl}(R) = R \cup Id_A$ ,
- (ii)  $h_{sym}(R) = R \cup R^T$ ,
- (iii)  $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$ ,
- (iv)  $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$ ,
- (v)  $h_{\ddot{a}q}(R) = (R \cup R^T)^*$ .

*Beweis.* Siehe Übungen. ■

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, dass ein Paar  $(a, b)$  genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle  $R^*$  von  $R$  ist, wenn es ein  $n \geq 0$  gibt mit  $aR^n b$ , d.h. es gibt Elemente  $x_0, \dots, x_n \in A$  mit  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  und

$$x_0 R x_1 R x_2 \dots x_{n-1} R x_n.$$

In der Graphentheorie nennt man  $x_0, \dots, x_n$  einen **Weg** der Länge  $n$  von  $a$  nach  $b$ .

### 2.4.1 Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Wir betrachten zunächst **Ordnungsrelationen**, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, antisymmetrisch und transitiv definiert sind.

**Beispiel 33.**

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$  und  $(\mathbb{N}, |)$  sind Ordnungen.  $(\mathbb{Z}, |)$  ist keine Ordnung, aber eine Quasiordnung.
- Für jede Menge  $M$  ist die relationale Struktur  $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$  eine Ordnung. Diese ist nur im Fall  $\|M\| \leq 1$  linear.
- Ist  $R$  eine Relation auf  $A$  und  $B \subseteq A$ , so ist  $R_B = R \cap (B \times B)$  die Einschränkung von  $R$  auf  $B$ .
- Einschränkungen von (linearen) Ordnungen sind ebenfalls (lineare) Ordnungen.

- Beispielsweise ist  $(\mathbb{Q}, \leq)$  die Einschränkung von  $(\mathbb{R}, \leq)$  auf  $\mathbb{Q}$  und  $(\mathbb{N}, |)$  die Einschränkung von  $(\mathbb{Z}, |)$  auf  $\mathbb{N}$ .  $\triangleleft$

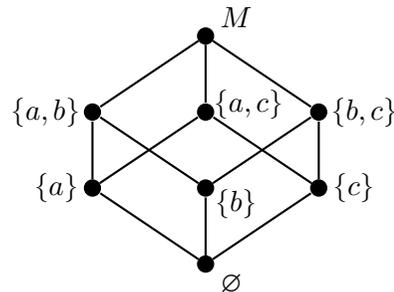
Ordnungen lassen sich sehr anschaulich durch Hasse-Diagramme darstellen. Sei  $\leq$  eine Ordnung auf  $A$  und sei  $<$  die Relation  $\leq \cap \overline{Id}_A$ . Um die Ordnung  $\leq$  in einem **Hasse-Diagramm** darzustellen, wird nur der Graph der Relation

$$\leq = < \setminus <^2, \text{ d.h. } x < y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

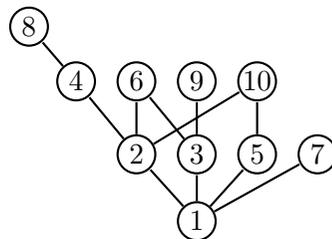
gezeichnet. Für  $x < y$  sagt man auch,  $y$  ist **oberer Nachbar** von  $x$ . Weiterhin wird im Fall  $x < y$  der Knoten  $y$  oberhalb vom Knoten  $x$  gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

**Beispiel 34.**

Die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  von  $M = \{a, b, c\}$  lässt sich durch nebenstehendes Hasse-Diagramm darstellen.



Schränken wir die "teilt"-Relation auf die Menge  $\{1, 2, \dots, 10\}$  ein, so erhalten wir folgendes Hasse-Diagramm.



**Definition 35.** Sei  $\leq$  eine Ordnung auf  $A$  und sei  $b$  ein Element in einer Teilmenge  $B \subseteq A$ .

- $b$  heißt **kleinstes Element** oder **Minimum** von  $B$  (kurz  $b = \min B$ ), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- $b$  heißt **größtes Element** oder **Maximum** von  $B$  (kurz  $b = \max B$ ), falls gilt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- $b$  heißt **minimal** in  $B$ , falls es in  $B$  kein kleineres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- $b$  heißt **maximal** in  $B$ , falls es in  $B$  kein größeres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

**Bemerkung 36.** Da Ordnungen antisymmetrisch sind, kann es in jeder Teilmenge  $B$  höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Die Anzahl der minimalen und maximalen Elemente in  $B$  kann dagegen beliebig groß sein.