Physikalische Simulation eines balancierenden planaren humanoiden Roboter (vereinfachte Version)

Die Abgabe erfolgt bis 09.01.2006 in schriftlicher Form.
Bei Fragen stehen wir jederzeit per EMail zu Verfügung:

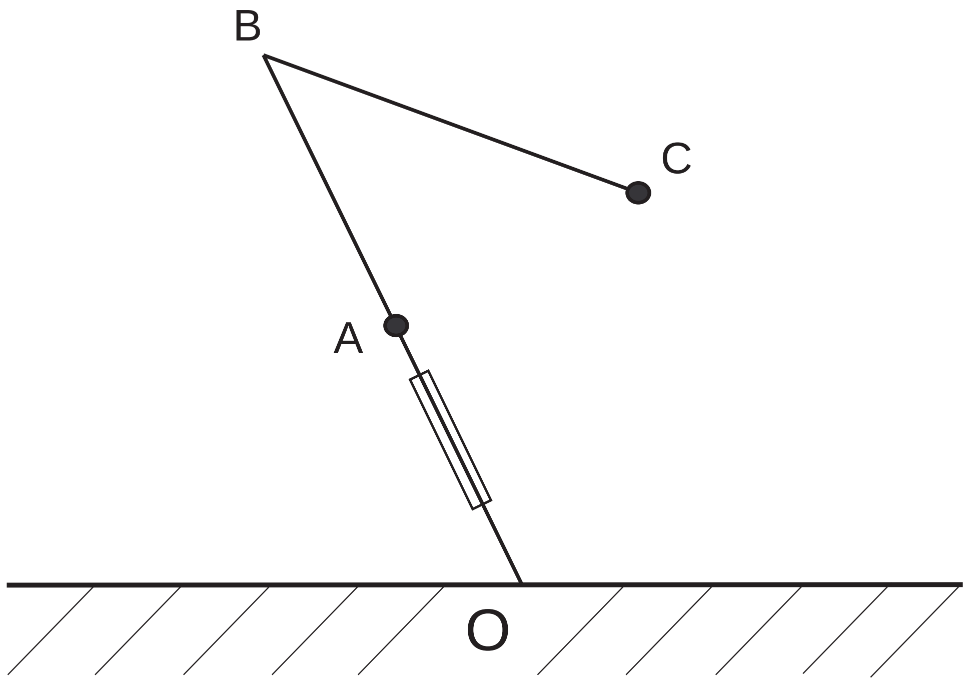
Heinrich Mellmann	mellmann@informatik.hu-berlin.de
Manfred Hild	hild@informatik.hu-berlin.de

Weitere Hinweise, das Material aus der Übung, sowie das notwendige Programm-Packet (MatLab-Skripte) werden auf der Veranstalltungs-Homepage

http://www.ki.informatik.hu-berlin.de/lehre/ws0506/KogRob0506.shtml

zur verfügung gestellt.

Man betrachte folgendes vereinfachte Modell eines BioLoid:



- In den Punkten A, und C sind jeweils Punktmassen m_a und m_c angebracht. Die Verbindungen sind starr und masselos.
- Wir vernachlässigen die Reibung, und nehmen an, dass wir uns auf der Erde befinden;
- An dem Punkt B ist ein Rotationsgelenk angebtacht (wie in der Abbildung 1 veranschalicht), dadurch soll das Schuletergelenk bzw. Ellenbogengelenk simuliert werden;
- Zweischen den Punkten O und A befindet sich ein Lineares Gelenk/Schiebegelenk (wie in Abbildung 1 abgebildet). Damit lässt sich die Länge des „Beins“ OA von L_{min} bis L_{max} verändern. Dadurch soll simuliert werden dass der Roboter in die „Hocke“ geht (ohne sich dabei zu neigen);
- Die ganze Konstruktion ist im Punkt O fest verankert (kann nicht verrutschen), kann aber kippen, sodass wir im Punkt O ebenfalls ein Rotationsgelenk annehmen können;

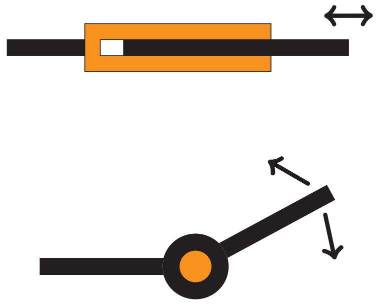
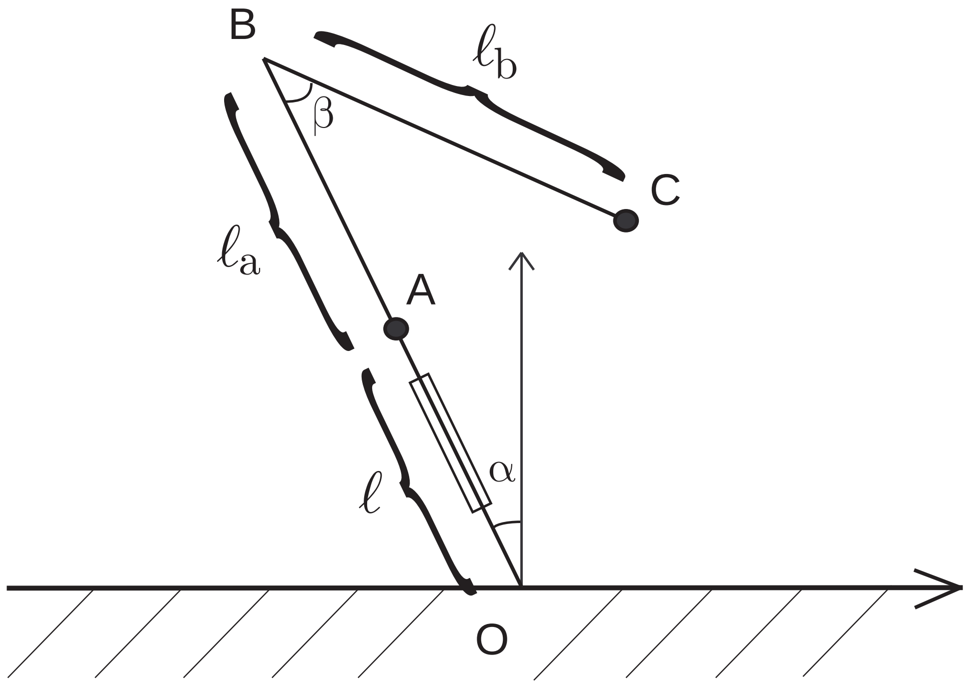


Abbildung 1: (oben) ein lineares Gelenk; (unten) ein Rotationsgeleng;

Das oben vorgestellte dynamische System kann man nun mit folgendnen Größen beschreiben:



wobei $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $l(t)$ sind von der Zeit abhängige *verallgemeinerte Koordinaten*, zusammengefasst:

$$q(t) = (\alpha(t), \beta(t), l(t))^T,$$

und l_a sowie l_b sind Konstanten, die die Längen der jeweiligen Verbindungen beschreiben.

In den folgenden Aufgaben soll nun Schritt für Schritt ein Differentialgleichungssystem (DGL) aufgestellt werden, welches das dynamische Verhalten dieses Systems bescheibt.

Aufgabe 1 (Ebenenkoordinaten)

Berechne die Positionsvektoren $r_a(q,t)$ und $r_c(q,t)$ der Punkte A und C in Kartesischen Koordinaten.
Bem.: der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Punkt O;

Aufgabe 2 (Potentielle Energie)

Berechne die *potentielle Energie* E_{pot} des gesamten Systems.
Bem.: Wir nehmen an, dass wir uns auf der Erde befinden. Die Annäherungsformel für die potentielle Energie eins Massepunktes λ ist gegeben durch:

$$E_{pot}^{\lambda} := h_{\lambda} \cdot F_g = h_{\lambda} \cdot m_{\lambda} \cdot g$$

wobei h_{λ} ist die Höhe des Massepunktes über der Erde, m_{λ} seine Masse und $g \approx 9,81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung. Die potentielle Energie eines Systems von Massepunkten ergibt sich dann als Summe potentieller Energie einzelner Masse-Punkte:

$$E_{pot} := \sum_{\lambda} E_{pot}^{\lambda} = -g \cdot \sum_{\lambda} h_{\lambda} \cdot m_{\lambda}.$$

Aufgabe 3 (Geschwindigkeitsvektoren)

Berechne die *Geschwindigkeitsvektoren* $v_a(\dot{q}, q, t)$ und $v_c(\dot{q}, q, t)$ der Punkte A und C. Ein Geschwindigkeitsvektor $v_{\lambda}(\dot{q}, q, t)$ des Masse-Punktes λ ist derfiniert durch

$$v_{\lambda}(\dot{q}, q, t) := \frac{d}{dt}\left(r_{\lambda}(q, t)\right),$$

und beschreibt die Geschwindigkeit des Masse-Punktes λ, sowie die Richtung in die er sich bewegt.

Aufgabe 4 (Kinetishe Energie)

Berechne die *kinetishe Energie* des gesamten Systems.
Bem.: Die kinetische Energie eines einzelnen Masse-Punktes λ ist gegeben durch:

$$E_{kin}^{\lambda}(\dot{q}, q, t) := \frac{1}{2} m_{\lambda} \cdot ||v_{\lambda}(\dot{q}, q, t)||^2$$

wobei $v_{\lambda}(\dot{q}, q, t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Punktes λ. Für die kinetische Egergie eines Systems von Massepunkten ergibt sich dann:

$$E_{kin}(\dot{q}, q, t) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda} m_{\lambda} \cdot ||v_{\lambda}(\dot{q}, q, t)||^2.$$

Aufgabe 5 (Euler-Lagrange-Gleichung)

Betrachte die *Lagrange-Funktion*:

$$L(\dot{q}, q, t) := E_{kin}(\dot{q}, q, t) - E_{pot}(q, t)$$

und stelle für jedes q_j die entsprechende *Euler-Lagrange-Gleichung*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

auf.

Aufgabe 6 (DGL)

Forme das in der Aufgabe 5 hergeleitete Differentialgleichungssystem (DGL) der 2-ten Ordnung in ein DGL der ersten Ordnung der Form:

$$\dot{x} = F(x(t), t)$$

mit

$$x := \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (Simulation)

Vervollständige die Datei *dynamics.m*. Experementiere mit unterschiedlichen Startwerten.
Bem: Die Länge der Verbindung zwieschen den Punkten O und A variiert von $L_{min} > 0$ bis $L_{max} > L_{min}$. Mit der obigen Konstruktion wird diese Einschränkung nicht berücksichtigt, d.h. das Lineare Gelenk zweischen O und A kann sich unendlich lang ausdehnen, bzw. negative Länge haben.

Aufgabe 8 (3-faches Pendulum)

Überlege nun, wie man die Länge des Linearen Gelenks fixieren kann (dabei dürfen nur in der Datei *dynamics.m* Änderungen vorgenommen werden, d.h. das Modell soll ensprechend angepasset werden). Das modifizierte Modell beschreibt dann ein 3-faches Pendulum. Teste es am MatLab-Modell.
Bem.: beachte dass man die Länge $l(t)$ nicht direkt beeinflussen kann, da nur $\dot{(l)}(t)$ und $\ddot{(l)}(t)$ als Rückgabeparameter zurückgegeben werden;

Aufgabe 9 (Korrekte Simulation)

Vervollständige nun das Programm so, dass das gesamte System sich so verhält wie in Aufgabe 7, falls $l_{min} \leq l(t) \leq l_{max}$, aber gesichert ist dass die Grenzen l_{max} und l_{min} nicht überschritten bzw. unterschritten werden.
Tipp: beachte das die Ableitung $\dot{l}(t)$ das Vorzeichen wechselt in Abhängigkeit davon ob das Schiebegelenk zusammengeschoben oder auseinandergezogen wird;

Viel Erfolg!