

## Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 23. November 2021, 15:00 Uhr

### Aufgabe 16

*mündlich*

Seien  $f, g, t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  echte Komplexitätsfunktionen mit  $f(n), g(n), t(n) \geq n$ . Für eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  mit  $\# \notin \Sigma$  sei die Sprache  $A_t$  definiert durch

$$A_t = \{x\#\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

Zeigen Sie:  $A \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \Leftrightarrow A_t \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(f(n)))$ .

### Aufgabe 17

*mündlich*

Zeigen Sie, dass aus  $E = NE$  folgt, dass  $\text{EXP} = \text{NEXP}$  ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Konstruktion aus [Aufgabe 16](#), um eine beliebige Sprache  $A \in \text{NEXP}$  in eine geeignete Sprache  $A_t \in \text{NE}$  zu transformieren.)

### Aufgabe 18

*mündlich*

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

- (1) Jede boolesche Formel über den Junktoren  $\neg, \vee$  und  $\wedge$  ist eine Q-Formel.
- (2) Ist  $G$  eine Q-Formel, so auch  $\exists xG$  und  $\forall xG$ .

Sei  $F$  eine Q-Formel mit freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und sei  $a = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$  eine Belegung. Der Wert von  $F$  unter  $a$  ist dann

- $F(a)$ , falls  $F$  quantorenfrei ist,
- $G(a0) \vee G(a1)$ , falls  $F = \exists y G(x_1, \dots, x_n, y)$  ist, und
- $G(a0) \wedge G(a1)$ , falls  $F = \forall y G(x_1, \dots, x_n, y)$  ist.

Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas) in PSPACE entscheidbar ist:

**Gegeben:** Eine Q-Formel  $F$

**Gefragt:** Ist  $F$  unter allen Belegungen wahr?

### Aufgabe 19

*mündlich*

Seien  $\Phi$  und  $\Phi'$  zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine berechenbare Funktion  $r$  gibt, so dass für alle Turingmaschinen  $M$  und für fast alle  $x$  gilt:  $\Phi(M, x) \leq r(x, \Phi'(M, x))$ .

### Aufgabe 20

**10 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t \rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0, 1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

- (a)  $K$  ist E-vollständig.
- (b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.
- (c) E ist nicht unter  $\leq_m^{\log}$  abgeschlossen.