

Übungsblatt 13

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 31. 1.–3. 2. 2023
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 31. 1. 2023, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 7. 2. 2023, 23:59 Uhr*

Hinweis: Für dieses Blatt benutzen Sie bitte bereits folgende Definitionen und Sätze:

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist auf eine Sprache $B \subseteq \Gamma^*$ *reduzierbar* ($A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt, sodass:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

- Eine Sprache A ist *schwer* (auch *hart*) für eine Sprachklasse \mathcal{C} unter \leq , falls für alle $B \in \mathcal{C}$ gilt $B \leq A$. Gilt zudem $A \in \mathcal{C}$, so sagen wir A ist *\mathcal{C} -vollständig* unter \leq .
- Eine Sprachklasse \mathcal{C} heißt *unter \leq abgeschlossen*, falls für alle $B \in \mathcal{C}$ und alle A mit $A \leq B$ gilt: $A \in \mathcal{C}$.
- Die Sprache H ist RE-hart, da sich jede Sprache $A \in \text{RE}$ auf eine Binärsprache $B \in \text{RE}$ reduzieren lässt und für die Binärkodierung w_B einer DTM für $\hat{\chi}_B$ gilt: $x \in B \Leftrightarrow M_{w_B}(x) \downarrow \Leftrightarrow w_B \# x \in H$. Somit ist $x \mapsto w_B \# x$ eine Reduktionsfunktion für $B \leq H$.

Aufgabe 80 Zeigen Sie:

12 Punkte

- Die Reduktionsrelation \leq ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch (und somit keine Ordnung). *(mündlich)*
- Die Klasse RE ist unter \leq abgeschlossen. *(mündlich)*
- Es existiert eine DTM M , die für jede Eingabe der Form $w \# x$ (wobei $w, x \in \{0, 1\}^*$) dasselbe ausgibt wie die DTM M_w bei Eingabe x , d.h. es gilt $M(w \# x) = M_w(x)$. *(mündlich)*
- Das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig. *(mündlich)*
- Die Sprache $B = \{1\}$ ist REC-vollständig. *(mündlich)*
- Für zwei Sprachen A, B gilt $A \leq B$ genau dann, wenn $\bar{A} \leq \bar{B}$. *(mündlich)*
- Eine Sprache A ist genau dann RE-vollständig, wenn ihr Komplement \bar{A} co-RE-vollständig ist. *(4 Punkte)*
- Jede Sprache $L \in \text{RE}$ mit $L \leq \bar{L}$ ist entscheidbar. *(4 Punkte)*
- Es gibt keine RE-vollständige Sprache, die co-RE-vollständig ist. *(4 Punkte)*

Aufgabe 81

mündlich

Für eine Sprachklasse \mathcal{S} sei $L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}$. Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Rice: $L_{\mathcal{S}}$ ist unentscheidbar, außer wenn $L_{\mathcal{S}} \in \{\emptyset, \{0, 1\}^*\}$.

Aufgabe 82**12 Punkte**

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

- (a) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ (mündlich)
- (b) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$ (mündlich)
- (c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt immer die Kopfbewegung } R \text{ aus}\}$ (mündlich)
- (d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus}\}$ (mündlich)
- (e) $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt zweimal hintereinander dieselbe Kopfbewegung aus}\}$ (3 Punkte)
- (f) $L_6 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \in \text{REG}\}$ (3 Punkte)
- (g) $L_7 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$ (3 Punkte)
- (h) $L_8 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$ (3 Punkte)

Aufgabe 83**6 Punkte**

Gelten die folgenden Aussagen für beliebige Sprachen $A \in \text{RE}$ und beliebige Sprachen $B \in \text{REC}$? Begründen Sie.

- (a) $A \cap B \in \text{REC}$, d.h. entscheidbar,
- (b) $A \cap B \notin \text{REC}$, d.h. unentscheidbar,
- (c) $A \cap B \in \text{RE}$, d.h. semi-entscheidbar,
- (d) $A \cap B \in \text{co-RE}$, d.h. $\overline{A \cap B}$ ist semi-entscheidbar,