

Übungsblatt 2

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 1.11.–4. 11. 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 9. 11. 2016

Essentielle Begriffe: Produkt zweier Sprachen, Sternhülle,
Potenzmengenautomat, regulärer Ausdruck

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: **10+12**; 13; 16
Sollten Sie jeweils mehr als ein Blatt benötigen, heften Sie diese bitte zusammen.

Aufgabe 10 Seien A, B, C Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie: **7 Punkte**

- (a) $(\{a\}^* \{b\}^*)^* = (\{a, b\}^*)^2$, (b) $(\{a\}^* \{b\}^*)^* = (\{a, b\}^2)^*$, (mündlich)
(c) $A^+ = AA^*$, (d) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$, (mündlich)
(e) $A(B \cup C) = AB \cup AC$, (f) $A(B \cap C) = AB \cap AC$. (4+3 Punkte)

Aufgabe 11 Für eine Sprache L seien **mündlich**

$\min(L) = \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\}$ und

$\max(L) = \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}$.

L heißt *präfixfrei*, falls kein Wort in L echtes Präfix eines anderen Wortes in L ist.

- (a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des \min -Operators.
(b) Zeigen Sie, dass die Aussagen $L = \max(L)$ und $L = \min(L)$ äquivalent sind.
(c) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem \min -Operator abgeschlossen ist,
d. h. für $L \in \text{REG}$ folgt $\min(L) \in \text{REG}$.

Aufgabe 12 **4+10 Punkte**

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie beschreiben wie Sie aus einem beliebigen DFA für L einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren. Begründen Sie jeweils auch die Korrektheit des von Ihnen konstruierten Automaten.

- (a) $\text{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$, (mündlich)
(b) $\text{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : yx \in L\}$, (mündlich)
(c) $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$, (mündlich)
(x^R bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B. $abcd^R = dcba$)
(d) L^+ , (4 Punkte)
(e) $\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^ \mid uv \in L\}$, (4 Zusatzpunkte)
(f) $L/2 = \{x \in \Sigma^ \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$. (6 Zusatzpunkte)

Hinweis: Mit * markierte Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Aufgabe 13 Betrachten Sie die Sprachen**8 Punkte**

$$A = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } B = \{v \in \{a, b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

- (a) Geben Sie für A und B je einen DFA (M_A / M_B) mit 2 Zuständen an. (2 Punkte)
- (b) Konstruieren Sie aus M_A und M_B mit dem Algorithmus aus der Vorlesung einen NFA N für das Produkt $L = AB$. (3 Punkte)
- (c) Konstruieren Sie aus M_B einen NFA N_{B^*} für die Sternhülle B^* von B mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. (3 Punkte)

Aufgabe 14**mündlich, optional**

Ein ENFA (extended NFA) ist wie ein NFA ein 5-Tupel $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^+ \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

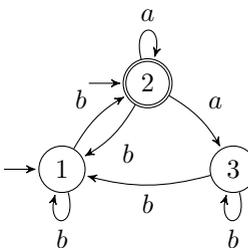
hat und $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^+$ beschriftet sind.

- (a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.
- (b) Zeigen Sie, dass bei Verzicht auf die Bedingung „ $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.
- (c) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \text{REG}$ ist, indem Sie aus einem beliebigen ENFA einen äquivalenten NFA konstruieren und umgekehrt.
- (d) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \text{REG}$ auch gilt, wenn man Σ^+ durch Σ^* ersetzt, d.h. $\delta : Z \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$.

Aufgabe 15**mündlich**

Sei $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die aba als Teilwort enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA N für L_1 an und zeigen Sie, dass $L(N) = L_1$ ist.
- (b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten.
- (c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und für $\overline{L_1}$ an.

Aufgabe 16 Gegeben sei folgender NFA N .**11 Punkte**

- (a) Geben Sie die Sprachen $L(N)$ und $\overline{L(N)}$ an. (2 Punkte)
- (b) Wandeln Sie den NFA N mittels der in der Vorlesung vorgestellten Potenzmengenautomatenkonstruktion in einen DFA M um. Lassen Sie dabei überflüssige (d.h. vom neuen Startzustand nicht erreichbare) Zustände weg. (6 Punkte)
- (c) Geben Sie sämtliche in M nicht erreichbaren Zustände an. (1 Punkt)
- (d) Geben Sie reguläre Ausdrücke für die Sprache $L(N)$ und ihr Komplement $\overline{L(N)}$ an. (2 Punkte)